UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Álgebras de Lie con seis ideales

Autor/es

JORGE ROLDÁN LÓPEZ

Director/es

MARÍA DEL PILAR BENITO CLAVIJO

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario en Modelización e Investigación Matemática, Estadístic

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2016-17

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Álgebras de Lie con seis ideales

Autor:

Jorge Roldán López

Tutor/es: María del Pilar Benito Clavijo

MÁSTER:
Máster en Modelización, Inv. Matemática, .. (759M)

Escuela de Máster y Doctorado

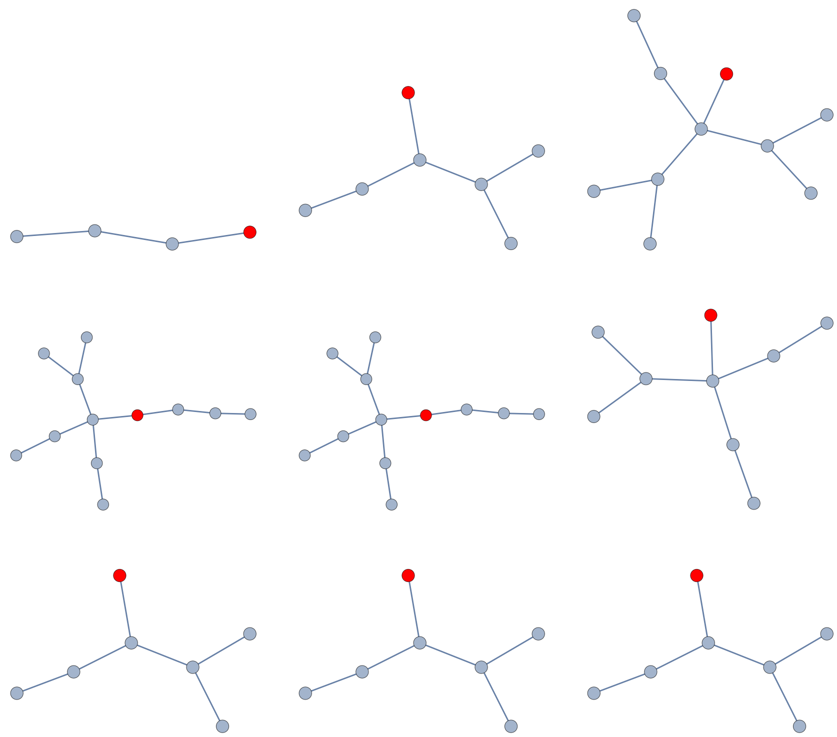
UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2016/2017

Álgebras de Lie con seis ideales

Trabajo Fin de Máster

Máster en Modelización e Investigación Matemática,
Estadística y Computación



Jorge Roldán López

Trabajo dirigido por María Del Pilar Benito Clavijo

Junio de 2017
Universidad de La Rioja

Mi más sincero agradecimiento a mi tutora
María del Pilar Benito Clavijo por su dedicación
y por guiarme en este trabajo, así como ayudarme
a empezar estudiar las álgebras de Lie.
También agradecer a mi familia y amigos por
apoyarme todos estos años.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las álgebras de Lie que cuentan con seis ideales. En una primera fase analizaremos todas las estructuras en retículo que puede formar sus ideales, descartando aquellos que no se dan y dando ejemplos de los que sí. Una vez tengamos esta clasificación y caracterización, nos centraremos en un tipo particular de estas: las no resolubles cuyos ideales están en cadena. Es dentro de este tipo donde, mediante construcciones con módulos, demostraremos enunciados y enunciaremos resultados sobre la existencia de estas álgebras.

Abstract

The aim of this project is the study of Lie algebras with six ideals. First, we will analyze all the possible lattice structures that their ideals could form, discarding those which never happen and giving examples for the ones which do. Once we have this classification and characterization, we will focus in a particular type of these algebras: the non-solvable ones whose ideals form a chain. For this type, using modules, we will prove statements and give results about the existence of these algebras.

Índice general

Introducción

Las álgebras de Lie son estructuras algebraicas no asociativas definidas sobre espacios vectoriales. Estas estructuras están estrechamente relacionadas con los grupos de Lie de variedades diferenciables. Estos son grupos donde el producto y la inversión son operaciones diferenciables. Más allá de la geometría de variedades, también tienen importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales, por ejemplo en la física.

Estas álgebras reciben su nombre en honor al matemático noruego Marius Sophus Lie (1842–1899) que descubrió una forma alternativa de estudiar los ahora conocidos como grupos de Lie. Esta consistía en analizar sus campos de vectores tangentes, que tienen la estructura de álgebras de Lie. Fue Hermann Weyl (1885–1955) el que aplicó estas teorías al estudio de grupos que ahora modelan simetrías en la mecánica cuántica.

Aparte de los estudios de Lie en la década 1870, en Alemania en torno a 1880 y de forma independiente, Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923) definió las álgebras de Lie. Aunque sus trabajos fueron menos rigurosos en términos matemáticos hizo grandes progresos al clasificar las álgebras de Lie simples de dimensión finita, así como al enunciar numerosas conjeturas que resultaron ser ciertas.

El siguiente avance llegó en Francia. Allí Élie Joseph Cartan (1869–1951), tomando los trabajos de Wilhelm Killing y Friedrich Engel (1861–1941), consiguió completar la clasificación de las álgebras de Lie simples, identificando las cuatro familias principales, así como las cinco excepciones.

Siguiendo los intentos de clasificación de estas álgebras nos encontramos con uno de los mayores avances en este campo, el Teorema de Levi. La descomposición de Levi, ya conjeturada por Killing y Cartan, fue probada por el matemático italiano Eugenio Elia Levi (1883–1917) en 1905. Según esta, todo álgebra de Lie finito dimensional se puede descomponer como suma directa de dos subálgebras, una semisimple y otra resoluble. Aunque ahora nos puedan resultar conceptos extraños, en el primer capítulo de este trabajo describiremos en qué consisten y comprenderemos así su importancia.

Destacar que el trabajo de Levi no concluye la clasificación, queda ahora pendiente el estudio de las álgebras resolubles. En este trabajo buscaremos, en

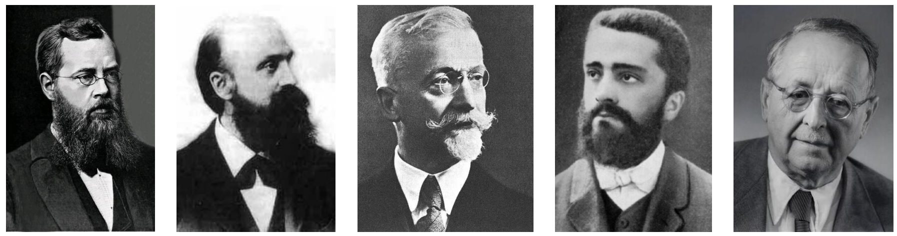


Figura 1: De izquierda a derecha y por orden cronológico: Sophus Lie, Wilhelm Killing, Élie Cartan, Eugenio Levi y Hermann Weyl.

una primera parte, estudiar la estructura de las álgebras de Lie con seis ideales, clasificándolas y viendo cómo se construyen. En la segunda y última parte nos centraremos en un tipo concreto de estas, las que presentan sus ideales formando una cadena, haciendo un estudio mucho más pormenorizado de ellas.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

En este primer capítulo vamos a definir y explicar los resultados básicos sobre álgebras de Lie que usaremos a lo largo de la memoria. Para hacerlo seguiremos una estructura muy similar a que aparece en [6, Capítulos 1–8]. Es precisamente en esta obra donde podremos encontrar la mayor parte de las demostraciones, así como detalles de lo aquí enunciado. Como en [6] el cuerpo base es el de los complejos, para cuerpos generales de característica cero haremos consultas en las obras [7] y [8] que contienen resultados más precisos.

1.1. Definiciones y conceptos básicos

Definición 1.1.1. Un *álgebra de Lie* L sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre dicho cuerpo junto con un producto binario

$$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$$

satisfaciendo las siguientes tres propiedades

1. $[\cdot,\cdot]$ es bilineal[1].
2. $[x,x] = 0$ para todo $x \in L$.
3. Para todo $x, y, z \in L$ se cumple la igualdad

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0, \tag{1.1}$$

   conocida como *identidad de Jacobi*.

Este producto interno es conocido como *corchete de Lie* o *conmutador*.

[1]Recordar que bilineal significa que dados $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{F}$ y $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$ se tiene

$$[a_1x_1 + a_2x_2, a_3x_3 + a_4x_4] = a_1(a_3[x_1,x_3] + a_4[x_1,x_4]) + a_2(a_3[x_2,x_3] + a_4[x_2,x_4]).$$

Notar que las dos primeras propiedades implican que el producto es antisimétrico, es decir $[x, y] = [-y, x]$. Además, si la característica del cuerpo $\mathbb{F}$ es distinta de dos, esta antisimetría implica la segunda condición. Otra propiedad que se deduce inmediatamente de la definición es que para todo $x \in L$, $[x, 0] = [0, x] = 0$. Asimismo, si $[x, y] \neq 0$ podemos decir que x e y son linealmente independientes.

Podemos encontrar sencillos ejemplos de álgebras de Lie como el producto vectorial en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ o uno más general, aunque poco interesante, el *álgebra de Lie abeliana*. Este álgebra se puede definir sobre cualquier espacio vectorial tomando el corchete de Lie como nulo. El uso de aplicaciones lineales nos proporciona ejemplos más interesantes, como el que describimos a continuación.

Ejemplo 1.1.1. Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sea $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} V$ el $\mathbb{F}$-espacio vectorial de los endomorfismos[2] de V. Se tiene que $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} V$ junto con el producto

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \tag{1.2}$$

dados $x, y \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}} V$, es un álgebra de Lie. Este álgebra se conoce como *álgebra general lineal* y se denota como $\mathfrak{gl}(V)$.

Es frecuente, dado que se trata de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, tomar bases y definir los elementos de $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} V$ como matrices. En este caso, (1.2) queda como

$$[x, y] = xy - yx, \tag{1.3}$$

donde xy e yx denotan el producto usual de matrices. Si V es un espacio vectorial n-dimensional, $\operatorname{End}_{\mathbb{F}} V$ son matrices $n \times n$ y el álgebra de Lie que definen junto con (1.3) se denota como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

1.1.1. Subálgebras e ideales

El concepto de espacio vectorial lleva consigo otros como el de subespacio. Con esta idea surge el concepto de subálgebra y muy ligado a este, el de ideal.

Definición 1.1.2. Sea L un álgebra de Lie y M un subespacio vectorial de L. Se dice que M es un *subálgebra* si

$$[x, y] \in M$$

para todo $x, y \in M$. Notar que M es, por sí sola, un álgebra de Lie.

Entendemos el subespacio producto o producto, si no da lugar a confusión, de dos subespacios U, V como el subespacio generado por el corchete de sus elementos, esto es

$$[U, V] = \langle [u, v] : u \in U, v \in V \rangle.$$

Por tanto decir que M es subálgebra es equivalente a decir que $[M, M] \subseteq M$.

[2] Aplicaciones lineales $f : V \to V$.

Notación 1.1.1. De ahora en adelante, al escribir $\langle x : x \in X\rangle$, salvo que indiquemos lo contrario, nos estaremos refiriendo a las $\mathbb{F}$-combinaciones lineales de elementos en X.

Ejemplo 1.1.2. El ejemplo más sencillo de subálgebra nos aparece al tomar cualquier subespacio 1-dimensional.

Ejemplo 1.1.3. Dentro de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ podemos encontrar varias subálgebras:

- El subespacio definido como el conjunto de matrices de traza cero define la subálgebra conocida como grupo especial lineal y denotada por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.
- Las matrices triangular superiores o triangulares inferiores también definen subálgebras.

Más adelante veremos otros ejemplos de subálgebras como $\mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F})$, definida en (1.4) en la sección 1.2.3.

Definición 1.1.3. Sea L un álgebra de Lie e I un subespacio vectorial de L. Se dice que I es un *ideal* si $[x, y] \in I$ para todo $x \in I$ e $y \in L$.

Notar que la antisimetría hace que no haya ideales a izquierda o derecha y que todo ideal sea a su vez subálgebra. Aunque el reciproco no es cierto.

Ejemplo 1.1.4. Sea L un álgebra de Lie cualquiera, entonces L y $\{0\}$ son siempre ideales. Se conocen como *ideales triviales*.

Ejemplo 1.1.5. Un ideal muy conocido es el *centro* de L, definido como

$$Z(L) := \{x \in L : [x, y] = 0 \ \forall y \in L\}.$$

Notar que $Z(L) = L$ si y solo si L es abeliana. Asimismo, todo subespacio dentro del centro es ideal.

1.1.2. Homomorfismos de álgebras de Lie

Inmediatamente tras la definición de una nueva estructura aparecen aplicaciones «compatibles con las operaciones de la estructura» para trabajar con ellas.

Definición 1.1.4. Sean L_1 y L_2 álgebras de Lie y $\varphi : L_1 \to L_2$ una aplicación. Diremos que φ es un *homomorfismo* si es lineal y conmuta con el corchete de Lie, es decir, para todo $x, y \in L_1$ se tiene que

$$\varphi([x, y]_{L_1}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_{L_2}.$$

Definición 1.1.5. Un homomorfismo biyectivo de álgebras de Lie es un *isomorfismo*.

Definición 1.1.6. Un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to L$ es un *automorfismo*. Al conjunto de ellos se le denota por $\operatorname{Aut} L$.

Ejemplo 1.1.6. Uno de los ejemplos de homomorfismos más importantes es el homomorfismo adjunto. Sea L un álgebra de Lie, entonces

$$\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L),$$

definido como $(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y]$, es un homomorfismo de álgebras de Lie. En adelante cuando escribamos $\mathrm{ad}_M N$ nos estaremos refiriendo a

$$\mathrm{ad}\colon N \to \mathfrak{gl}(M),$$

mientras que si $L = M$ a veces lo simplificaremos escribiendo $\mathrm{ad}\, N$. La imagen de esta aplicación la denotaremos como $\mathrm{ad}_M(N)$ para que no exista confusión.

1.1.3. Álgebras y derivaciones

Definición 1.1.7. Un *álgebra* sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial A junto con una aplicación bilineal

$$f\colon A \times A \to A.$$

Usualmente $f(x, y)$ se denota como xy.

Definición 1.1.8. Se dice que un álgebra es *asociativa* si dados $x, y, z \in A$

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)).$$

Escrito de forma más sencilla, $(xy)z = x(yz)$.

Definición 1.1.9. Se dice que un álgebra es *unitaria* si existe $1 \in A$ tal que

$$x = f(1, x) = f(x, 1).$$

Tanto $\mathrm{End}_{\mathbb{F}} V$ como las matrices $M(n, \mathbb{F})$ son álgebras asociativas y unitarias. Sin embargo, en general, las álgebras de Lie no cumplen estas propiedades. De hecho, el corchete de Lie de un álgebra de Lie cualquiera L es asociativo si y solo si $[x, y] \in Z(L)$ para todo $x, y \in L$.

Definición 1.1.10. Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, llamamos *derivación* de A a una aplicación $\mathbb{F}$-lineal $D\colon A \to A$ tal que, dados $a, b \in A$,

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b.$$

Notar que esto es una formalización de la derivada usual de funciones de variable real.

El conjunto de derivaciones de un álgebra, denotado como $\mathrm{Der}(A)$, es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$.

Ejemplo 1.1.7. Para cualquier elemento $x \in L$ álgebra de Lie, las aplicaciones $\mathrm{ad}_L\, x$, mencionadas en el ejemplo 1.1.6 de la sección 1.1.2, son derivaciones gracias a la identidad de Jacobi. Se conocen como *derivaciones internas* y el conjunto de ellas se denota como $\mathrm{Inner}\, L$. Gracias a que

$$[d, ad_L x] = ad_L d(x),$$

para cualquier $d \in \mathrm{Der}\, L$, $\mathrm{Inner}\, L$ es un ideal de $\mathrm{Der}\, L$.

1.1.4. Construcciones básicas

A partir de subálgebras e ideales es posible construir nuevas subestructuras de este tipo gracias a las siguientes propiedades fácilmente comprobables. Sean I, J ideales y sean A, B subálgebras, todos ellos de un mismo álgebra de Lie L, se tiene que

- $I + J$, $I \cap J$ y $[I, J]$ son ideales,
- $I + A$, $A \cap B$ son subálgebras,
- $I \cap A$ es ideal de A,

donde dados dos subespacios U, V entendemos al subespacio suma como

$$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\}.$$

Definición 1.1.11. Sea I un ideal de un álgebra de Lie L. El *álgebra cociente*

$$L/I := \{z + I \mid z \in L\}$$

con conmutador

$$[x + I, y + I] := [x, y] + I$$

es un álgebra de Lie.

Definición 1.1.12. Definimos la *suma directa* de las álgebras de Lie L_1 y L_2 como

$$L_1 \oplus L_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}.$$

Que, junto con el conmutador

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]),$$

dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L_1 \oplus L_2$, define un álgebra de Lie.

Este concepto nos permite introducir la siguiente definición.

Definición 1.1.13. Un álgebra de Lie L se dice *descomponible* si puede expresarse como suma directa de ideales propios. En caso contrario se dice *indescomponible*

1.1.5. Teoremas de isomorfía

En álgebras de Lie, los clásicos tres teoremas de isomorfía tienen sus adaptaciones.

Teorema 1.1.1 (Primer teorema de isomorfía)**.** *Sea* $\varphi\colon L_1 \to L_2$ *un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces* $\ker\varphi$ *es un ideal de* L_1*,* $\operatorname{Im}\varphi$ *es una subálgebra de* L_2 *y*

$$L_1/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

Llegados a este punto podemos decir que dado que

$$\ker ad = \{x \in L : [x, L] = 0\} = Z(L)$$

se tiene que $L/Z(L) \cong ad(L) = \operatorname{Inner} L$.

Teorema 1.1.2 (Segundo teorema de isomorfía)**.** *Si I, J son ideales de un mismo álgebra de Lie entonces*

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J).$$

Teorema 1.1.3 (Tercer teorema de isomorfía)**.** *Sean I, J ideales de un mismo álgebra de Lie L tal que $I \subseteq J$. Entonces J/I es ideal de L/I y*

$$(L/I)/(J/I) \cong L/J.$$

Además se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.4. *Para todo I ideal de un álgebra de Lie L existe una correspondencia biyectiva entre los ideales de L/I y los ideales J de L tal que $I \subseteq J$.*

1.2. Clasificación de álgebras de Lie

De ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario, L hará mención a un álgebra de Lie cualquiera sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero. Antes empezar a distinguir sus formas, debemos dar una definición y un lema básicos.

Definición 1.2.1. Sea L un álgebra de Lie, se define el *álgebra derivada* y se denota L' al producto $[L, L]$.

Lema 1.2.1. *Si I es un ideal de L entonces L/I es abeliana si y solo si $L' \subseteq I$.*

1.2.1. Álgebras resolubles

Para empezar debemos explicar alguna notación. Así, se define $L^{(0)} = L$ y $L^{(k)} := [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$ para $k \geq 1$.

Notar que de esta definición se tienen los siguientes resultados:

- $L' = L^{(1)}$
- Como el producto de ideales es ideal, los $L^{(k)}$ son ideales de L, y por tanto de $L^{(k-1)}$, para todo $k \geq 0$. Podemos formar la siguiente cadena de ideales

  $$L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(n)},$$

  que se denomina serie derivada de L.

Con estos conceptos ya estamos listos para definir qué es un álgebra de Lie resoluble.

Definición 1.2.2. Un álgebra de Lie L se dice *resoluble* si existe $m \geq 1$ tal que $L^{(m)} = 0$. Al menor m tal que $L^{(m)} = 0$ se le llama *índice de resolubilidad* de L.

Lema 1.2.2. *Si L es un álgebra de Lie donde se puede encontrar una cadena de ideales*

$$L = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_{m-1} \supseteq I_m = 0,$$

tal que I_{k-1}/I_k es abeliano para $1 \leq k \leq m$, entonces L es resoluble.

Lema 1.2.3. *Sea L un álgebra de Lie*

- *Si L es resoluble entonces toda subálgebra e imagen homomorfa de L también es resoluble.*
- *Si L tiene un ideal I tal que L/I e I son resolubles entonces L es resoluble.*
- *Si I, J son ideales resolubles de L entonces $I + J$ es resoluble.*

Este último punto es especialmente relevante y permite enunciar el siguiente corolario, esencial para describir álgebras de dimensión finita.

Corolario 1.2.4. *Sea L un álgebra de Lie finito dimensional, entonces existe un único ideal resoluble de L que contiene a todos los ideales resolubles.*

Este ideal se denomina *ideal radical* y se denota como $\operatorname{rad} L$ o simplemente $R(L)$. Aunque, cuando no de lugar a equívocos, lo abreviaremos como R.

1.2.2. Álgebras nilpotentes

Análogamente a la serie derivada definida para explicar el concepto de álgebra resoluble tenemos otra serie.

Definición 1.2.3. Se denomina *serie central descendente* de un álgebra de Lie L a la serie con términos $L^1 = L$ y $L^k = [L, L^{k-1}]$ para $k \geq 2$. Esta serie crea la cadena de ideales

$$L \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \cdots$$

donde L^k es ideal de L^n para $1 \leq n \leq k$.

El término central hace referencia a que $L^k/L^{k+1} \subseteq Z(L/L^{k+1})$. Así mismo podemos definir la serie central ascendente.

Definición 1.2.4. Se denomina *serie central ascendente* de un álgebra de Lie L a la serie con términos $Z_1(L) = 0$ y $Z_i(L)$ al ideal de L tal que $Z(L/Z_{i-1}(L)) = Z_i(L)/Z_{i-1}(L)$ para $k \geq 2$. Esta serie crea la cadena de ideales

$$Z_1(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq Z_3(L) \subseteq \cdots \subseteq L.$$

Definición 1.2.5. Un álgebra de Lie L se dice *nilpotente* si existe $m \geq 2$ tal que $L^m = 0$. Al menor m tal que $L^m = 0$ se le llama *índice de nilpotencia* de L.

Podemos observar que L es nilpotente con índice de nilpotencia m si y solo si $Z_m(L) = L$. Notar que un álgebra nilpotente también es resoluble, pero el recíproco no tiene por qué ser cierto.

Lema 1.2.5. *Para cualquier L álgebra de Lie, se tienen los siguientes resultados*

- *Si L es nilpotente entonces todas sus subálgebras también lo son.*
- *Si $L/Z(L)$ es nilpotente entonces L es nilpotente.*
- *Si I, J son ideales nilpotentes de L entonces $I + J$ es un ideal nilpotente.*

Observar que esta segunda implicación no equivale a que si I es ideal de L, tal que L/I e I son nilpotentes, L lo sea. Aunque en resolubles el resultado es cierto, en nilpotentes no se puede hacer tal afirmación. Por otro lado, la tercera implicación, análogamente al corolario 1.2.4 pero con nilpotencia, nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.2.6. Sea L un álgebra de Lie, llamamos *nilradical* al mayor ideal nilpotente de L. Se denota por $\operatorname{nil} L$, $N(L)$ o simplemente N.

Además, sabemos por [8, Teorema 13, pág. 51] que se tiene la siguiente relación entre el nilradical y el radical.

Teorema 1.2.6. *Sea L un álgebra de Lie finito dimensional con radical R y nilradical N, entonces se tiene que $[L, R] \subseteq N$.*

1.2.3. Álgebras simples y semisimples

Definición 1.2.7. Un álgebra de Lie se dice *simple* cuando no es abeliana y sus únicos ideales son los triviales.

Todas las álgebras de Lie simples, como ya se mencionó en la introducción de esta memoria, fueron clasificadas por Élie Cartan en su tesis en 1894 (trabajando las ideas de Killing). Salvo cinco casos excepcionales denotados como E_6, E_7, E_8, F_4 y G_2, todas las álgebras de Lie simples definidas sobre los complejos (en general sobre cuerpos algebraicamente cerrados) son isomorfas a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ o $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. La definición de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ya la vimos en el ejemplo 1.1.3 de la sección 1.1.1. Para definir el otro par debemos introducir la siguiente subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

$$\mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{C}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : x^t S = -Sx\}. \tag{1.4}$$

Así, denotando por I_n a la matriz identidad $n \times n$, definimos

- el álgebra de Lie ortogonal par como $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_S(2n, \mathbb{C})$ donde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

- el álgebra de Lie ortogonal impar como $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_S(2n+1,\mathbb{C})$ donde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$
- y el álgebra de Lie simpléctica como $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_S(2n,\mathbb{C})$ donde
$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando estas definiciones nos queda

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = -N, P^t = -P \right\}, \\ \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & p & q \\ r & M & N \\ s & P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = -N, P^t = -P, r^t = -q, s^t = -p \right\}, \\ \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = N, P^t = P \right\}. \end{aligned}$$

Todas ellas se conocen como álgebras de Lie lineales o clásicas para distinguirlas de las excepcionales. Para valores de n pequeños tenemos que $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Una notación alternativa es poner la dimensión como subíndice. Así $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ sería equivalente a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ o incluso, si el cuerpo se sobreentiende o es genérico, simplemente $\mathfrak{sl}_2$.

Definición 1.2.8. Un álgebra de Lie no nula finito dimensional L se dice *semisimple* si no tiene ideales no nulos resolubles, es decir, si $\operatorname{rad} L = 0$.

1.2.4. Clasificación general

Una vez hemos definido qué son las álgebras resolubles, nilpotentes, simples y semisimples, veamos cómo podemos expresar un álgebra de Lie cualquiera en términos de estas.

Proposición 1.2.7. *Toda álgebra de Lie semisimple de dimensión finita se puede expresar de forma única como suma directa de ideales que, vistos como álgebras de Lie, son simples.*

Teorema 1.2.8 (Teorema de Levi)**.** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero, entonces existe una subálgebra $S \subseteq L$ tal que $L = S \oplus R$, donde R es el radical de L.*

Esta descomposición en suma directa se denomina *descomposición de Levi*, siendo S el conocido como *factor de Levi*. Por el corolario 1.2.4 sabemos que el radical es único. Sin embargo los factores de Levi no lo son, aunque son isomorfos como nos indica el siguiente teorema.

Teorema 1.2.9 (Teorema de Malcev-Harish-Chandra, ver [8])**.** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero con descomposición de Levi $L = S \oplus R$. Para toda subálgebra semisimple S_1 de L existe $\varphi \in \operatorname{Int} L$[3] tal que $\varphi(S_1) \subseteq S$.*

Una forma de visualizar la estructura de los factores de Levi es aplicar el siguiente lema.

Lema 1.2.10. *Si L es un álgebra de Lie, entonces $L/\operatorname{rad} L$ es semisimple.*

1.3. Representaciones de álgebras de Lie

Definición 1.3.1. Una *representación* de un álgebra de Lie L es un homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$.

Definición 1.3.2. Una representación φ de L se dice *fiel* cuando $\ker \varphi = 0$. En este caso, por el primer teorema de isomorfía, se tiene que $L \cong \varphi(L)$.

Ejemplo 1.3.1. El ejemplo más sencillo, pero a la vez poco útil es la *representación trivial*, donde $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in L$. Salvo que L sea cero es claramente una representación no fiel.

Ejemplo 1.3.2. Otro ejemplo sencillo se tiene cuando L es un subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. En dicho caso la identidad nos da una representación fiel llamada *representación natural*.

Ejemplo 1.3.3. Por último, un ejemplo general es la *representación adjunta*. Esta se define como

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}\colon L &\to \mathfrak{gl}(L) \\ x &\mapsto \operatorname{ad} x \end{aligned}$$

y es fiel cuando $Z(L) = 0$.

Equivalente al concepto de representación tenemos el de módulo que aparece asociado a la acción de un álgebra de Lie sobre un espacio vectorial.

Definición 1.3.3. Un módulo de un Lie para L o L-módulo es una aplicación, que se dice acción,

$$\begin{aligned} \psi\colon L \times V &\to V \\ (x, v) &\mapsto \psi(x, v) = x \cdot v, \end{aligned}$$

donde V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial finito dimensional, satisfaciendo

1. $(\lambda x + \mu y) \cdot v = \lambda(x \cdot v) + \mu(y \cdot v)$,

[3] $\operatorname{Int} L$ es el subgrupo de automorfismos generado por los automorfismos internos, es decir, los elementos de la forma $\exp(\operatorname{ad} z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\operatorname{ad} z)^n}{n!}$ tal que $z \in N(L)$.

2. $x \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda(x \cdot v) + \mu(y \cdot v)$,
3. $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$.

para $x, y \in L$, $v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

Notar que las primeras dos condiciones nos dicen que φ debe ser bilineal, mientras que la segunda a solas nos muestra que la aplicación $\psi(x, \cdot) \in \operatorname{End} V$.

Como ya hemos dicho antes, las representaciones y los módulos son conceptos equivalentes. En efecto, dada una representación φ sobre un espacio vectorial V podemos definir un L-módulo en V ψ declarando $\psi(x, v) := \varphi(x)(v)$. Análogamente, dado un ψ L-módulo tenemos de la representación $\varphi(x) = \psi(x, \cdot)$.

Como ya ocurriese con las álgebras, aquí también tenemos los conceptos de submódulos y módulos factor.

Definición 1.3.4. Sea V un L-módulo, diremos que W es un *submódulo* si $x \cdot w \in W$ para todo $x \in L$ y $w \in W$, es decir, W es invariante para la acción de L sobre V. Esto mismo lo escribiremos abreviadamente como $L \cdot W \subseteq W$.

Ejemplo 1.3.4. Sea L un álgebra de Lie resoluble sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación. Se tiene que $\varphi(L)$ es resoluble, como ya vimos en el lema 1.2.3, y tiene al menos un vector propio no nulo. Sea v este vector entonces $\langle v \rangle$ es un subrepresentación.

Definición 1.3.5. Sea W un L-submódulo, definimos un *cociente de módulos* o *módulo factor* como

$$\begin{aligned} \psi \colon \ & L \times V/W \to V/W \\ & (x, v + W) \mapsto x \cdot (v + W) = (x \cdot v) + W, \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5. El ejemplo más sencillo lo encontramos en la representación adjunta. Si I es un ideal de L podemos definir la representación de L/I en sí misma usando módulos cociente tal que

$$x \cdot (y + I) := (\operatorname{ad} x)(y) + I = [x, y] + I.$$

Hay varias formas de generar nuevos módulos a partir de otros. La estructura cociente es una de ellas. Otras que usaremos con mucha frecuencia son

- la suma de módulos, $U + V$ (o $U \oplus V$ si es suma directa),
- la intersección, $U \cap V$,
- y el producto tensor $U \otimes V$. En este caso la acción viene dada en la forma

$$x \cdot (u \otimes v) = (x \cdot u) \otimes v + u \otimes (x \cdot v).$$

Definición 1.3.6. Un módulo V de un álgebra de Lie se dice *irreducible* o *simple* si es no nulo y no tiene submódulos más allá del total y el nulo.

Definición 1.3.7. Un módulo V de un álgebra de Lie se dice *indescomponible* si no existen submódublos U, W no nulos tal que $V = U \oplus W$. En otro caso diremos que es *descomponible*.

Notar que el hecho de que un módulo sea irreducible implica que es indescomponible, pero el recíproco no es cierto.

Definición 1.3.8. Un módulo V de un álgebra de Lie se dice *completamente reducible* si se puede expresar

$$V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_k,$$

con S_i submódulos irreducibles.

Unido a estos conceptos tenemos un resultado que nos permite conocer casos en los que se da la completa reducibilidad de un módulo.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Weyl)**.** *Sea L un álgebra de Lie semisimple, entonces toda representación de L finito-dimensional es completamente reducible. Además, el número de módulos irreducibles de cualquier descomposición es invariante y, salvo reordenación, los módulos que aparecen son isomorfos.*

Este teorema viene acompañado del siguiente lema.

Lema 1.3.2. *Sea $\phi\colon L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de un álgebra de Lie semisimple L, entonces $\phi(L) \subseteq \mathfrak{sl}(V)$. En particular, L actúa trivialmente sobre los L-módulos 1-dimensionales.*

Por último vamos a ver en este apartado los homomorfismo de módulos.

Definición 1.3.9. Sea L un álgebra de Lie y V, W L-módulos a través de las acciones ρ_V y ρ_W respectivamente. Llamamos *homomorfismo de L-módulos* a toda aplicación lineal $\theta : V \to W$ tal que

$$\theta(\rho_V(x, v)) = \rho_W(x, \theta(v)),$$

para todo $x \in L$ y $v \in V$.

De nuevo para módulos y homomorfismos aparecen teoremas de isomorfía análogos a los de la sección 1.1.5.

1.3.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$

El álgebra especial lineal sobre un espacio vectorial 2-dimensional es muy particular. Se trata de la menor álgebra de Lie simple, tiene tan solo dimensión tres.

Si recordamos el ejemplo 1.1.3, este álgebra se puede escribir como las matrices 2×2 de traza cero, es decir aquellas de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$ con $a, b, c \in \mathbb{F}$. Una base de estas matrices la forman los elementos

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En (1.3) vimos que el producto en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ se define como $[x,y] = xy - yx$. Así, en nuestro álgebra, los productos quedan unívocamente determinadas por bilinealidad a través de

$$[e,f] = h, \qquad [f,h] = 2f, \qquad [h,e] = 2e.$$

Este álgebra de Lie, independientemente del cuerpo sobre el que se encuentre, admite un tipo particular de módulos, que denotaremos por V_d o $V(d)$. Uno de los modelos de este tipo de módulo son los espacios vectoriales de polinomios homogéneos en $\mathbb{F}[x,y]$ de grado d. Tales espacios son de dimensión $d+1$ y están generados por los polinomios básicos $x^{d-i}y^i$, es decir,

$$V_d = \langle x^d, x^{d-1}y, x^{d-2}y^2, \ldots, xy^{d-1}, y^d \rangle. \tag{1.5}$$

Para ver que efectivamente es un $\mathfrak{sl}_2$-módulo debemos definir la acción de $\mathfrak{sl}_2$ sobre cada uno de sus elementos. En este caso la aplicación que estamos buscando es bastante natural

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\to \mathfrak{gl}(V_d) \\ e &\mapsto x\,\tfrac{\partial}{\partial y} \\ f &\mapsto y\,\tfrac{\partial}{\partial x} \\ h &\mapsto x\,\tfrac{\partial}{\partial x} - y\,\tfrac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Estos módulos son irreducibles, lo que es fácil ver si representamos la acción de $\mathfrak{sl}_2$ sobre dicho módulos como podemos ver en la figura 1.1. En ella se observa que no importa de qué elemento partamos, podemos llegar a todos y cada uno de los demás aplicando e o f.

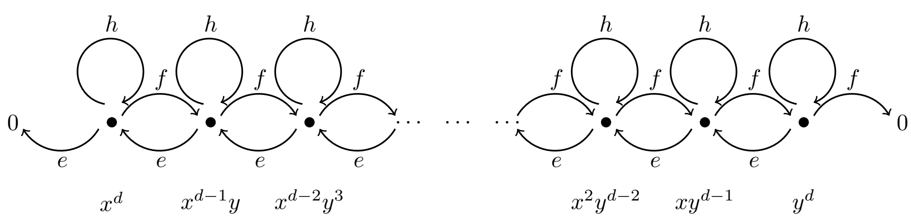


Figura 1.1: Diagrama de cómo actúan, salvo múltiplos escalares, los elementos de la base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ sobre los elementos de la base de V_d.

Pero tenemos algunos potentes resultados que nos permiten ir más allá.

Proposición 1.3.3. *Si V es un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ módulo irreducible de dimensión finita, entonces V es isomorfo a cierto V_d.*

Corolario 1.3.4. *Si tenemos una representación finito dimensional de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ donde $v \in V$ módulo tal que $e \cdot v = 0$, entonces el submódulo de V generado por v es un módulo isomorfo a V_d donde d se obtiene de $h \cdot v = dv$.*

Esto, junto con los teoremas 1.2.9 y 1.3.1, nos viene a decir que un álgebra de Lie cuyo factor de Levi es isomorfo a $\mathfrak{sl}_2$ tiene por radical a un $R(L)$ tal que

$$R(L) \cong V_{d_1} \oplus V_{d_2} \oplus \cdots V_{d_k}.$$

1.3.2. Homomorfismos de $\mathfrak{sl}_2$-módulos

Por último vamos a ver cómo podemos definir productos entre estos módulos, es decir homomorfismos de módulos. Dada un álgebra de Lie L y una representación ρ_V el conjunto de L homomorfismos de módulos se denota por

$$\mathrm{Hom}_L(V, V) = \{\phi\colon V \to V \mid \phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v)\}.$$

Está formado por aquellas aplicaciones que conmutan con todas las acciones de los elementos de L sobre V. Describir este tipo de conjuntos no es fácil en general, depende mucho de la estructura de L.

Uno de los resultados más útiles cuando se trabaja con representaciones es el llamado Lema de Schur.

Lema 1.3.5 (Lema de Schur)**.** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero y sean U, V L-módulos irreducibles. Entonces:*

1. *Un homomorfismo de L-módulos $\theta\colon U \to V$ no es nulo es un isomorfismo.*
2. *Si $\theta\colon V \to V$ es un homomorfismo no nulo de L-módulos que tiene algún vector propio, entonces θ es un múltiplo escalar de la identidad.*

El caso $L = \mathfrak{sl}_2$ presenta ciertas particularidades en el cálculo de homomorfismos. De hecho, desde el lema 1.3.5 es fácil concluir el siguiente corolario.

Corolario 1.3.6. *Sea V un $\mathfrak{sl}_2$-módulo finito dimensional e irreducible sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ arbitrario de característica cero. Una aplicación $\theta : V \to V$ es un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$-módulos si y solo si θ es un múltiplo escalar de la identidad.*

Así, aplicando este corolario, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V_n, V_m) = \begin{cases} \{\alpha \; id \mid \alpha \in \mathbb{F}\} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \tag{1.6}$$

En esta memoria no vamos a necesitar estos homomorfismos, sino los conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V_n \otimes V_m, V_m)$. Para describir cada uno de ellos necesitaremos primero aplicar la fórmula de Clebsch-Gordan que aparece en [7].

Lema 1.3.7 (Fórmula de Clebsch-Gordan)**.** *Sean V_n, V_m dos $\mathfrak{sl}_2$-módulos irreducibles con $m \leq n$, se tiene que*

$$V_n \otimes V_m \cong \bigoplus_{k=0}^{m} V_{n+m-2k} = V(n+m) \oplus V(n+m-2) \oplus \cdots \oplus V(n-m).$$

Así, para estudiar $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V_n \otimes V_m, V_m)$, nos limitaremos a descomponer el producto tensor en módulos irreducibles y aplicar sobre cada uno (1.6).

A vista del corolario 1.3.6 y del lema 1.3.7 podemos ver que

$$\dim \mathrm{Hom}(V_n \otimes V_m, V_{n+m-2k}) = 1$$

para $0 \leq k \leq m$. Por tanto, para describir este subespacio solamente será necesario encontrar un homomorfismo no nulo, puesto que los demás serán múltiplos de este por un escalar. Para determinar homomorfismos no nulos disponemos de unas aplicaciones lineales llamadas transvecciones introducidas en [5].

Definición 1.3.10. Llamamos k-transvección a la aplicación

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_k \colon V_n \times V_m &\to V_{n+m-2k} \\ (f,g) &\mapsto (f,g)_k \end{aligned}$$

donde $0 \leq k \leq n \leq m$ y

$$(f,g)_k = \frac{(m-k)!}{m!}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\frac{\partial^k g}{\partial x^i \partial y^{k-i}}.$$

Notar que $(f,g)_0 = f \cdot g$, es decir, el producto usual de polinomios y que la k-ésima transvección es un producto antisimétrico cuando k es impar ya que

$$(f,g)_k = (-1)^k (g,f)_k.$$

Estos homomorfismos los utilizaremos para construir álgebras de Lie de la forma $V \oplus \mathfrak{sl}_2$, con

$$V = V_{d_1} \oplus \cdots \oplus V_{d_k}$$

un $\mathfrak{sl}_2$-módulo, en el que introduciremos productos $V_{d_i} \times V_{d_j} \to V_{d_k}$ compatibles con la estructura de $\mathfrak{sl}_2$-módulo. Cuando $V_n = V_m$ para conseguir un álgebra de Lie necesitaremos añadir como condición adicional que k sea impar. Esto se debe a que necesitaremos una aplicación antisimétrica. Así debemos buscar productos que terminen en el espacio que llamaremos 2-alternado

$$\Lambda^2 V_n = \bigoplus_{\substack{i=0 \\ 2i+1 \leq n}} V_{2n-2(2i+1)}.$$

1.3.3. Construcciones de álgebras de Lie

Haciendo uso de álgebras de Lie ya existentes, módulos, homomorfismos, etc. podemos construir nuevas álgebras de Lie. Algunas de las técnicas más comunes y que utilizaremos en posteriores capítulos son:

c1) Extensión escindida nula no resoluble. Sea S un álgebra de Lie simple y V un S-módulo podemos ver $V \oplus S$ como álgebra de Lie tomando $[V, V] = 0$ y $[s, v] = s \cdot v$ para todo $s \in S$ y $v \in V$. Notar que

$$V \text{ es } S\text{-trivial} \Longleftrightarrow S \text{ es ideal.}$$

c2) Extensión escindida nula resoluble. Sea $f \in End_{\mathbb{F}}(V)$ podemos ver $V \oplus \langle f \rangle$ como álgebra de Lie tomando $[V, V] = 0$ y $[f, v] = f(v)$ para todo $v \in V$. Notar que

$$f \equiv 0 \Longleftrightarrow \langle f \rangle \text{ es un ideal.}$$

c3) Extensión $A \oplus \langle d \rangle$, donde A es un (sub)álgebra de Lie y $d \in \mathrm{Der}(A)$.

c4) Extensión $A \oplus S$, donde A y S son (sub)álgebras de Lie, S es semisimple y existe $\rho \colon S \to \mathfrak{gl}(A)$ tal que $\rho(S) \subseteq \mathrm{Der}(A)$.

A todas estas construcciones se les pueden añadir otras álgebras de Lie en forma de suma directa de ideales para dar nuevas construcciones.

Capítulo 2

Estructura general de las álgebras con seis ideales

En este capítulo vamos a estudiar la estructura que presentan los retículos de ideales de las álgebras de Lie, en concreto las que tienen únicamente seis ideales.

2.1. Retículo de ideales

Definición 2.1.1. Un retículo es un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ tal que dados $a, b \in P$, existe otro par de elementos $c, d \in P$ que hacen de ínfimo y supremo, es decir, $c = \text{ínf}(a, b)$ y $d = \sup(a, b)$, respectivamente.

Dada un álgebra de Lie, sus ideales forman un retículo con el orden definido por la relación de inclusión, donde el supremo e ínfimo coinciden con la suma e intersección de ideales respectivamente. Cuando el retículo tiene un número finito de elementos, este se puede representar mediante un *diagrama de Hasse*. Este diagrama es un grafo donde los nodos son los ideales y las aristas denotan una relación de contenido directa, es decir, sin ideales intermedios.

En general, no todo álgebra de Lie tiene un número finito de ideales. Si consideremos el álgebra abeliana 2-dimensional tenemos ya un ejemplo de álgebra cuyo retículo tiene un número infinito de elementos. En efecto, sean u, v base de este álgebra $\langle u + \alpha v \rangle$ es un ideal distinto para cada $\alpha \in \mathbb{F}$.

Por otro lado notar que, aunque el álgebra determina de forma única el retículo de sus ideales, el recíproco no es cierto en general. Esto es algo que veremos a lo largo del capítulo. Además, también descubriremos que no todo diagrama de Hasse se corresponde con el retículo de ideales de un álgebra de Lie. Por ejemplo, el retículo de la figura 2.1 no hace referencia a ningún álgebra de Lie. Esto se debe a que no es modular. En [4, página 20] se prueba que todo retículo asociado con un álgebra de Lie debe ser modular.

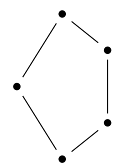


Figura 2.1: Retículo no modular que no se asocia con ningún álgebra de Lie.

Definición 2.1.2. Un retículo $(P, \leq)$ se dice modular si dados tres elementos $A, B, C \in P$ tales que $A \leq B$, $\text{ínf}(A, C) = \text{ínf}(B, C)$ y $\sup(A, C) = \sup(B, C)$, se cumple que $A = C$.

En términos de ideales, esto equivale a ver que dados tres ideales A, B, C tales que $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$ y $A + C = B + C$ se cumple que $A = C$.

Así que llegados a este punto ya estamos listos para tratar de clasificar la estructura reticular de las álgebras de Lie con exactamente seis ideales.

2.2. Posibles retículos

En esta sección nos plantearemos todos los posibles retículos. Después iremos descartando aquellos que no puedan dar lugar a álgebras de Lie sobre cuerpos $\mathbb{F}$ de característica cero, bien porque no sean modulares o por otros motivos.

Antes de nada, notar que todo álgebra de Lie con 6 ideales tiene ya dos triviales predefinidos, el total, llamémoslo L, y el nulo denotado por 0. Así que solo nos resta saber cómo se distribuyen los cuatro ideales intermedios. Para hacerlo vamos a seguir un proceso iterativo en el que iremos reduciendo el número de ideales minimales.

2.2.1. Retículos con cuatro ideales minimales

Si L tuviera cuatro ideales minimales su retículo sería el de la figura 2.2.

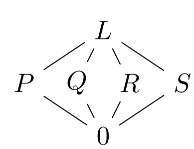


Figura 2.2: Retículo con cuatro ideales minimales.

Pero esta estructura no es posible. Por un lado, como la intersección de ideales es ideal, se tiene que

$$P \cap Q = P \cap R = P \cap S = Q \cap R = Q \cap S = R \cap S = 0.$$

En particular, dados $A, B \in \{P, Q, R, S\}$ distintos, se tiene que $[A, B] \subseteq A \cap B = 0$. Si ahora utilizamos que su suma también es ideal, tenemos que

$$P + Q = P + R = P + S = Q + R = Q + S = R + S = L.$$

Este par de condiciones obligan a que el álgebra de Lie asociada a dicho retículo deba ser abeliana pues

$$\left.\begin{aligned} L' = [L, L] = [Q + R, P + R] &= [R, R] \subset R \\ L' = [L, L] = [P + Q, P + R] &= [P, P] \subset P \end{aligned}\right\} \Rightarrow L' \subseteq P \cap R = 0.$$

Pero esto es contradictorio con que tenga exactamente cuatro ideales propios. Un álgebra abeliana de dimensión mayor o igual que dos sobre un cuerpo infinito tiene un número infinito[1] de ideales, mientras que si es de dimensión 1 no hay ideales intermedios. Así sabemos que L tiene a lo sumo 3 ideales minimales.

2.2.2. Retículos con tres ideales minimales

Las posibles configuraciones de retículos con tres ideales minimales se muestran en la figura 2.3. De nuevo ninguno de estos retículos se puede dar en un

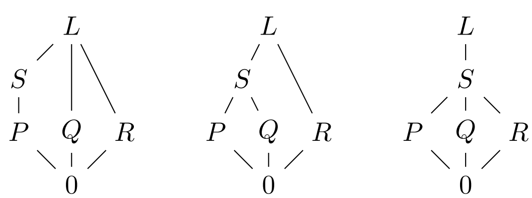


Figura 2.3: Posibles retículos con tres ideales minimales.

álgebra de Lie. Los dos primeros no son retículos modulares. En efecto, en ambos $P \subseteq S$, $0 = P \cap R = S \cap R$ y $L = P + R = S + R$. Lo que es absurdo pues P y S son ideales distintos.

Veamos ahora cómo podemos descartar el retículo restante. Antes de nada debemos notar que

- S es un ideal abeliano pues

  $$S = P + Q = P + R = Q + R, \qquad 0 = P \cap Q = P \cap R = Q \cap R.$$

  y entonces

  $$\left.\begin{aligned} S' = [S, S] = [Q + R, P + R] &= [R, R] \subset R \\ S' = [S, S] = [P + Q, P + R] &= [P, P] \subset P \end{aligned}\right\} \Rightarrow S' \subseteq P \cap R = 0.$$

- L/S es o bien 1-dimensional o bien simple al no tener ideales intermedios.

Es este último punto el que hace que tengamos que distinguir dos casos.

[1] Como ya hicimos notar en la sección 2.1.

Caso 1: L/S es 1-dimensional

En este caso tenemos $L = S \oplus \langle x \rangle$ donde los ideales propios de L son los ideales de L contenidos en S a diferencia del nulo. Al tratarse de ideales, se tiene que son $\operatorname{ad} x$-invariantes pues $[x, W] \subseteq W$. Así podemos entender $\operatorname{ad} x$ como una aplicación lineal de S, visto este como un espacio vectorial.

Llegados a este punto, al encontrarnos con una aplicación lineal entre espacios vectoriales, podemos tomar una base y obtener una representación de esta en formato matricial. Sea p_A el polinomio característico asociado a la forma matricial A de $\operatorname{ad} x$, este tiene la forma

$$p_A(y) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(y)^{\alpha_i},$$

siendo n el número de polinomios irreducibles π_i distintos. ¿Cuántos tenemos?

Caso $n = 1$. Sea π el único polinomio irreducible, entonces se tiene que cumplir que $\dim(\ker \pi(A)) = \operatorname{gr} \pi$. De no ser así, existen $v, w \in \ker \pi(A)$ tales que

$$\langle A^i v \mid i = 0, \dots, \operatorname{gr} \pi - 1 \rangle \quad \text{y} \quad \langle A^i w \mid i = 0, \dots, \operatorname{gr} \pi - 1 \rangle$$

son ideales minimales con intersección trivial y

$$\langle A^i (v + \alpha w) \mid i = 0, \dots, \operatorname{gr} \pi - 1 \rangle$$

da otro ideal distinto para cada $\alpha \in \mathbb{F}$. Pero en el caso $\dim(\ker \pi(A)) = \operatorname{gr} \pi$, tendría como único ideal minimal $\langle A^i v \mid i = 0, \dots, \operatorname{gr} \pi \rangle$ para $v \in \ker \pi(A)$. Queda pues descartado.

Caso $n = 2$. Sean π_1, π_2 los polinomios irreducibles, siguiendo un razonamiento similar, llegaríamos a que $\dim(\ker \pi_1(A)) = \operatorname{gr} \pi_1$ y $\dim(\ker \pi_2(A)) = \operatorname{gr} \pi_2$. Pero esto genera solo dos ideales minimales y necesitamos tres.

Caso $n = 3$. Este caso, de forma de nuevo análoga, nos lleva a tres espacios $\ker \pi_i(A)$ con $i = 1, 2, 3$ cuyo tamaño coincide con el grado del irreducible que los genera. El problema viene que tendríamos muchos más ideales intermedios procedentes de combinar $\ker \pi_i(A) \oplus \ker \pi_j(A)$ con $i \neq j$.

Caso $n \geq 4$. Nuevamente queda descartado al aparecer más de cuatro ideales intermedios asociados con los cuatro núcleos.

Es decir, ningún número de polinomios irreducibles nos da el retículo deseado. Este caso no es pues posible.

Caso 2: L/S es simple

En este caso $L = A \oplus T$ con T simple, donde hemos renombrado S como A al ser un álgebra abeliana. Notar que $[T, W] \subseteq W$ para todo W ideal, es decir, los ideales propios de L son los T-submódulos para la aplicación adjunta $\operatorname{ad} T$. En concreto el número de T-submódulos de A es 3. Sean estos P, Q, R se tiene que

$$A = P \oplus Q = P \oplus R = Q \oplus R$$

luego

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A/P \cong Q \\ A/P \cong R \end{array}\right\} \Rightarrow Q \cong R \\ \left.\begin{array}{l} A/R \cong P \\ A/R \cong Q \end{array}\right\} \Rightarrow P \cong Q \end{array}\right\} \Rightarrow P \cong Q \cong R.$$

Así existen isomorfismos de T-submódulos $\varphi_{PQ} \colon P \to Q$ y análogamente $\varphi_{PR}, \varphi_{QR}, \ldots$ Ahora consideramos los siguientes ideales[2]

$$\begin{aligned} K^{\alpha}_{PQ} &= \{a + \alpha\, \varphi_{PQ}(a) \mid a \in P\} \subseteq A, \\ K^{\alpha}_{PR} &= \{a + \alpha\, \varphi_{PR}(a) \mid a \in P\} \subseteq A, \\ K^{\alpha}_{QR} &= \{a + \alpha\, \varphi_{QR}(a) \mid a \in Q\} \subseteq A \end{aligned}$$

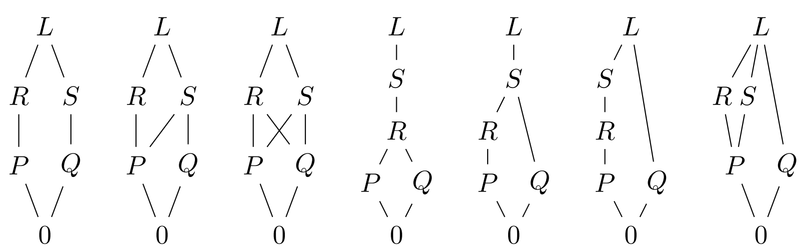
dado $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Como $P \neq K^{\alpha}_{PQ}$ y $Q \neq K^{\alpha}_{PQ}$, se debe cumplir que $K^{\alpha}_{PQ} = R$. Análogamente $K^{\alpha}_{PR} = Q$ y $K^{\alpha}_{QR} = P$. Como esto se tiene para todo α, podemos tomar $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tal que

$$a + \alpha_1\, \varphi_{PQ}(a) - a - \alpha_2\, \varphi_{PQ}(a) = (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_{PQ}(a) \in R \cap Q = 0,$$

al ser resta de elementos de R e imágenes en Q. Esto implica que $\varphi_{PQ} \equiv 0$. Lo que es absurdo. Es decir, este caso tampoco es posible.

2.2.3. Retículos con dos ideales minimales

Descartadas todas las posibles configuraciones con cuatro o tres ideales minimales, veamos ahora el caso con dos. Estos deben ser de la forma



(I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII)

[2]Son ideales pues

$$[t, a + \alpha\, \varphi(a)] = [t, a] + \alpha[t, \varphi(a)] = [t, a] + \alpha\varphi([t, a]).$$

El primero, quinto, sexto y séptimo podemos descartarlos al no ser modulares. En los cuatro se tiene que $P \subseteq R$ y como $P \cap Q = R \cap Q = 0$ y $P + Q = R + Q$, debe cumplirse que $P = R$. Pero no es cierto al tratarse de ideales distintos donde la relación de contenido es estricta. El tercer retículo tampoco se puede dar pues se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} P, Q \subseteq R \\ P, Q \subseteq S \end{array}\right\} \Rightarrow P, Q \subseteq R \cap S.$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $P = R \cap S$. Pero esto es una contradicción pues $Q \not\subset P$.

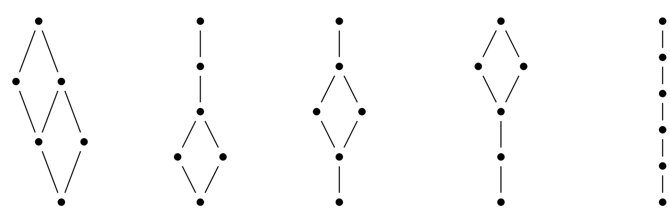
En resumen, con dos ideales minimales, solo las configuraciones (II) y (IV) son candidatas a ser retículos de álgebras de Lie.

2.2.4. Retículos con un ideal minimal

Veamos por último las álgebras con a lo sumo un único ideal minimal. Sea P este ideal, podemos estudiar los retículos de L/P ya conocidos por [2], a los que tendríamos que añadir un elemento por la parte inferior. Esto es posible gracias al teorema de correspondencia entre ideales Este nos dice que existe una biyección entre los ideales I de L tal que $P \subseteq I$ y los ideales de L/P. Está biyección lleva I a I/P y viceversa, generándose así el mismo retículo con la salvedad del ideal extra que aparece en la parte inferior.

2.2.5. Candidatos a retículos

En resumen, los posibles retículos con 6 ideales que puede tener un álgebra de Lie son los de la figura 2.4.



(I) (II) (III) (IV) (V)

Figura 2.4: Retículos de álgebras de Lie con seis ideales.

2.3. Ejemplos de álgebras de Lie

Una vez tenemos cinco candidatos a retículos cabe preguntarse si, en efecto, existen álgebras de Lie con dichas configuraciones de ideales. En esta sección vamos a dar un ejemplo de álgebra para cada uno de estos retículos. Luego el comentario a pie de la figura 2.4 es correcto.

De cara a enunciar los ejemplos que muestren que estas cinco estructuras son posibles, vamos a tomar una base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ describiendo la parte no nula de su tabla de productos. Además como $[a, b] = -[b, a]$ solo escribiremos productos $[x_i, x_j]$ donde $i < j$. Además para simplificar la notación denotaremos

$$V(n_1, n_2, \dots, n_k) = V(n_1) \oplus V(n_2) \oplus \cdots \oplus V(n_k).$$

(I) El álgebra en $\mathbb{R}$ que tiene por base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ con productos $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = -2x_1$, $[x_2, x_3] = 2x_2$, $[x_4, x_6] = x_5$, $[x_5, x_6] = -x_4$. La idea de este álgebra[3], que podemos ver en la figura 2.5, subyace de tomar $\{x_1, x_2, x_3\}$ como $\{e, f, g\}$ base de $\mathfrak{sl}_2$, $R = N \oplus \langle x_6 \rangle$ radical de L, con N el nilradical abeliano con base $\{x_4, x_5\}$. Como productos se toma $[N, \mathfrak{sl}_2] = 0$. Este álgebra se obtiene de combinar las construcciones c1 para $N \oplus \langle x_6 \rangle$ y c2 dado que $N \oplus \langle x_6 \rangle$ es un $\mathfrak{sl}_2$-módulo trivial.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
R \arrow[dr, dash] & & N \oplus \mathfrak{sl}_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & N \arrow[dr, dash] & & \mathfrak{sl}_2 \arrow[dl, dash] \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.5: Retículo (I).

(II) El álgebra que tiene por base $\{x_1, x_2, \dots, x_{13}\}$ con productos

$$\begin{array}{llll}
[x_1, x_2] = x_3 & [x_1, x_3] = -2x_1 & [x_1, x_5] = x_4 & [x_1, x_6] = 2x_5 \\
[x_1, x_7] = 3x_6 & [x_1, x_9] = x_8 & [x_1, x_{10}] = 2x_9 & [x_1, x_{11}] = 3x_{10} \\
[x_1, x_{12}] = 4x_{11} & & & \\
\\
[x_2, x_3] = 2x_2 & [x_2, x_4] = 3x_5 & [x_2, x_5] = 2x_6 & [x_2, x_6] = x_7 \\
[x_2, x_8] = 4x_9 & [x_2, x_9] = 3x_{10} & [x_2, x_{10}] = 2x_{11} & [x_2, x_{11}] = x_{12} \\
\\
[x_3, x_4] = 3x_4 & [x_3, x_5] = x_5 & [x_3, x_6] = -x_6 & [x_3, x_7] = -3x_7 \\
[x_3, x_8] = 4x_8 & [x_3, x_9] = 2x_9 & [x_3, x_{11}] = -2x_{11} & [x_3, x_{12}] = -4x_{12}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
[x_4, x_5] = x_8/3 & [x_4, x_6] = 2x_9/3 & [x_4, x_7] = x_{10} + x_{13} \\
[x_5, x_6] = (x_{10} - x_{13})/3 & [x_5, x_7] = 2x_{11}/3 & [x_6, x_7] = x_{12}
\end{array}$$

[3]En vez de $\mathfrak{sl}_2$ podemos considerar cualquier álgebra simple real, clásica o excepcional.

La idea de este álgebra, que podemos ver en la figura 2.6, viene de tomar $\{x_1, x_2, x_3\}$ como $\{e, f, g\}$ base de $\mathfrak{sl}_2$, y luego los $\mathfrak{sl}_2$-módulos $V(3)$, $V(4)$ y $V(0)$, con bases $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$, $\{x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ y $\{x_{13}\}$ respectivamente. Si llamamos $N = V(3,4,0)$, $N^2 = V(4,0)$ donde se ha declarado el producto antisimétrico $p\colon V(3) \times V(3) \to \Lambda^2 V(3) = V(4) \oplus V(0)$ mediante transvecciones. Es pues una construcción de tipo c4 con $N \oplus \mathfrak{sl}_2$ y N de Lie con índice de nilpotencia 3.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{sl}_2 \oplus V(3,4,0) \arrow[d, dash] & \\
 & V(3,4,0) \arrow[d, dash] & \\
 & V(4,0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V(4) \arrow[dr, dash] & & V(0) \arrow[dl, dash] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.6: Retículo (ii).

(iii) El álgebra que tiene por base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ con productos

$$\begin{array}{llll}
[x_1, x_2] = x_3, & [x_1, x_3] = -2x_1, & [x_1, x_5] = x_4, & [x_1, x_7] = x_6, \\
[x_1, x_8] = 2x_7, & [x_1, x_9] = 3x_8, & [x_2, x_3] = 2x_2, & [x_2, x_4] = x_5, \\
[x_2, x_6] = 3x_7, & [x_2, x_7] = 2x_8, & [x_2, x_8] = x_9, & [x_3, x_4] = x_4, \\
[x_3, x_5] = -x_5, & [x_3, x_6] = 3x_6, & [x_3, x_7] = x_7, & [x_3, x_8] = -x_8, \\
[x_3, x_9] = -3x_9, & [x_4, x_5] = x_{10}, & [x_6, x_9] = x_{10}, & [x_7, x_8] = -x_{10}/3.
\end{array}$$

Este álgebra se presenta en la figura 2.7. Hemos tomado de nuevo como base de $\mathfrak{sl}_2$ a $\{x_1, x_2, x_3\}$, a la que hemos pegado varios $\mathfrak{sl}_2$-módulos.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{sl}_2 \oplus V(1,3,0) \arrow[d, dash] & \\
 & V(1,3,0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
V(1,0) \arrow[dr, dash] & & V(3,0) \arrow[dl, dash] \\
 & V(0) \arrow[d, dash] & \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.7: Retículo (iii).

Como bases de $V(1), V(3)$ y $V(0)$ hemos tomado $\{x_4, x_5\}, \{x_6, x_7, x_8, x_9\}$ y $\{x_{10}\}$ respectivamente. Se han definido productos antisimétricos mediante transvecciones $p\colon V(n) \times V(n) \to V(0)$ para $n = 1, 3$ y declarado $[V(1), V(3)] = 0$ y $Z(N) = N^2 = V(0)$. De nuevo estamos usando la construcción c4.

(IV) El álgebra que tiene por base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ con productos

$$
\begin{array}{llll}
[x_1, x_2] = x_3, & [x_1, x_3] = -2x_1, & [x_1, x_6] = x_5, & [x_2, x_3] = 2x_2, \\
[x_2, x_5] = x_6, & [x_3, x_5] = x_5, & [x_3, x_6] = -x_6, & [x_4, x_5] = x_5, \\
[x_4, x_6] = x_6, & [x_4, x_7] = 2x_7, & [x_5, x_6] = x_7. &
\end{array}
$$

Podemos apreciar cómo hemos construído este álgebra en la figura 2.8. Hemos tomado de nuevo $\{x_1, x_2, x_3\}$ como base de $\mathfrak{sl}_2$, a la que le hemos pegado dos $\mathfrak{sl}_2$ módulos irreducibles $V(1)$ y $V(0)$ con bases $\{x_5, x_6\}$ y $\{x_7\}$ respectivamente. Aquí $N = V(1,0)$ es un álgebra de Heissenberg y $Z(N) = N^2 = V(0)$. Estamos ante la construcción c4.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & L \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{sl}_2 \oplus V(1,0) \arrow[dr] & & ((x_4)) \oplus V(1,0) \arrow[dl] \\
 & V(1,0) \arrow[d] & \\
 & V(0) \arrow[d] & \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.8: Retículo (IV).

(V) El álgebra que tiene por base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ con productos $[x_1, x_5] = x_1$, $[x_i, x_5] = x_{i-1} + x_i$ para $i = 2, 3, 4$. Esta construcción es del tipo c2, $V \oplus \langle f \rangle$ con $[V, V] = 0$. No obstante en el capítulo 3 de esta memoria se muestra una forma general de construir álgebras de este tipo empleando submódulos irreducibles de $\mathfrak{sl}_2$.

2.4. Construcciones generales

Visto que es posible encontrar un álgebra de Lie para cada uno de estos retículos, tratemos de estudiar ahora formas generales de obtenerlas.

Antes de nada debemos definir el radical de Jacobson, denotado como $\mathcal{J}(L)$, como la intersección de todos los ideales maximales. Se sabe por [9, Teorema 3.1] que $\mathcal{J}(L) = [L, R(L)]$. Así, usando [8, Teorema 13, capítulo 2] tenemos que

$$\mathfrak{J}(L) \subseteq N(L) \subseteq R(L).$$

En particular si L es resoluble $\mathcal{J}(L) = L^2$.

Por otro lado, si P es un ideal minimal, como $P^2 = [P, P] \subseteq P$, entonces

1. si $P^2 = P$ entonces P es simple y $P \subseteq S$ para todo S factor de Levi de L,
2. si $P^2 = 0$ entonces P es abeliano, $P \subseteq N(L)$ y $P \subseteq Z(N(L))$.

Finalmente vamos a introducir algún resultado que vamos a necesitar además de los vistos en el capítulo 1.

Lema 2.4.1. *Sea L un álgebra de Lie no simple tal que* $\dim L > 1$*, entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

- *L tiene un único ideal maximal.*
- *$L = N(L) \oplus S$ donde S es un 1-dimensional o simple y* $\mathrm{ad}_L S$ *actúa no trivialmente sobre cada subespacio $ad_L S$-invariante de $N(L)/N(L)^2$.*

Este lema nos aparece enunciado y probado en [2, Lema 2.2]. Notar que en él, así como a lo largo de este apartado, con $\oplus$ denotamos la suma directa de espacios vectoriales y no álgebras de Lie. Es decir, esto no implica que el producto de los elementos sumados entre ellos sea nulo.

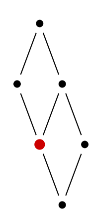
Lema 2.4.2. *Sea L un álgebra de Lie e I un ideal minimal tal que $I \subseteq N(L)$. Entonces I es abeliano, y además $I \subseteq Z(N(L))$.*

Definición 2.4.1 (Cíclico)**.** Una aplicación $f \colon V \to V$ entre espacios vectoriales se llama cíclica cuando existe un vector $v \in V$ tal que

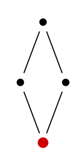
$$V = \langle f^i(v) \mid i \geq 0 \rangle.$$

2.4.1. Retículo (I)

En este caso nos encontramos con el retículo de la figura 2.9a, donde hemos resaltado el ideal de Jacobson. Si calculamos el cociente $L/\mathcal{J}(L)$ obtenemos un



(a) Retículo de L.



(b) Retículo de $L/\mathcal{J}(L)$.

Figura 2.9: Retículos del caso (I), con y sin cociente.

álgebra como la de la figura 2.9b. Gracias a que este retículo fue estudiado en [2, Retículo IV(b)], sabemos que $L/\mathcal{J}(L)$ es de una de las siguientes formas:

1. $L/\mathcal{J}(L) = \langle x \rangle \oplus S$ con S simple y $\langle x \rangle$ el centro.

   Aquí $R(L)/\mathcal{J}(L)$ es 1-dimensional y $L = R(L) \oplus S$, con S simple. Como $R(L)$ y $\mathcal{J}(L)$ son $\operatorname{ad} S$-módulos se tiene que entre ellos hay un módulo 1-dimensional $\langle x \rangle$ cumpliendo, por el lema 1.3.2, que $[x, S] = 0$ y que

   $$L = R(L) \oplus S = \mathcal{J}(L) \oplus \langle x \rangle \oplus S.$$

2. $L/\mathcal{J}(L) = S_1 \oplus S_2$, ambas simples. Aquí $\mathcal{J}(L) = N(L) = R(L) \subsetneq L$ y

   $$L = \mathcal{J}(L) \oplus S_1 \oplus S_2.$$

En cualquier caso $\mathcal{J}(L)$ es un $\operatorname{ad} T$-módulo para el álgebra $T = \langle x \rangle \oplus S$ o $T = S_1 \oplus S_2$. Notar que todo lo calculado hasta ahora es extrapolable al retículo (IV).

Centrémonos ahora en las particularidades del caso que nos ocupa. Por el lema 2.4.2 se tiene que $\mathcal{J}(L)$ es abeliano al ser un ideal minimal resoluble. Es más, si T actuase trivialmente sobre $\mathcal{J}(L)$ entonces S_1, S_2, S y/o $\langle x \rangle$, según donde estemos, serían ideales minimales. Absurdo, luego T actúa no trivialmente sobre $\mathcal{J}(L)$ que, además, al ser minimal y abeliano, es un T-módulo irreducible. La pregunta que finalmente nos hacemos es, ¿cuánto vale $\ker \operatorname{ad} T$?

- Si $\operatorname{ad} T$ es una representación fiel, es decir, $\ker \operatorname{ad} T = \{0\}$ entones por [2, Teorema 2.3 (XI)] nos encontraríamos ante otro retículo, uno con tan solo cinco ideales. Descartado.
- Si $\ker \operatorname{ad} T = T$ estaría actuando trivialmente, lo que ya hemos descartado.
- Es decir, solo nos queda $\ker \operatorname{ad} T = \langle x \rangle$ o $\ker \operatorname{ad} T = S$ en el caso de $T = \langle x \rangle \oplus S$ o $\ker \operatorname{ad} T = S_1$ cuando $T = S_1 \oplus S_2$.

En resumen, este retículo solo se puede dar bajo las siguientes estructuras de álgebras:

1. $L = N \oplus \langle x \rangle \oplus S$ con S simple, $[x, S] = 0$, N un álgebra abeliana y
   1a) N es un S-módulo irreducible no trivial tal que $[x, N] = 0$.
   1b) $\operatorname{ad} x$ actúa no trivialmente sobre N y el polinomio mínimo de $\operatorname{ad}_L x|_N$ es irreducible y coincide con el característico. Además $[S, N] = 0$.
2. $L = N \oplus S_1 \oplus S_2$ con S_1, S_2 subálgebras simples, $[S_1, S_2] = 0$, N es un S_1-módulo irreducible no trivial y S_2 actúa trivialmente sobre N.

Es más, se puede comprobar que si tienes un álgebra de Lie como las aquí descritas, esta presenta por retículo 2.4 (I). Como ya hicimos antes, llamamos T a $S \oplus \langle x \rangle$ en los casos 1a y 1b y a $S_1 \oplus S_2$ en el caso 2. Entonces, en cualquier situación, N y $\ker \operatorname{ad}_N T$ son ideales minimales. Si buscamos otros ideales I en L, estos, por la descomposición de Levi, deben de ser de la forma

$$I = I \cap R(L) \oplus S_I,$$

con S_1 un factor de Levi de I. Por el teorema 1.2.9 se tiene que existe $\varphi \in \operatorname{Int} L$ tal que $\varphi(S_1) \subset S_L$, donde S_L es un factor de Levi de L. Dado que I es un ideal $\varphi(I) \subseteq I$, luego $\varphi(S_I) \subseteq S_L \cap I$. Así podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe S_I factor de Levi de I tal que $S_I \subseteq S_L$.

En las álgebras de los puntos 1a y 1b tenemos que $R(L) = N \oplus \langle x \rangle$, mientras que $S_L = S$. Así los posibles ideales son

$$\{0\},\ N,\ \langle x \rangle,\ S,\ R(L) = N \oplus \langle x \rangle,\ N \oplus S,\ \langle x \rangle \oplus S,\ L = N \oplus \langle x \rangle \oplus S.$$

En 1a ni S ni $\langle x \rangle \oplus S$ son ideales, mientras que en 1b $\langle x \rangle$ y $\langle x \rangle \oplus S$ tampoco lo son. Luego en ambos casos se da el retículo de la figura 2.4 (I).

En el álgebra del punto 2 se tienen los siguientes posibles ideales

$$\{0\},\ N,\ S_2,\ S,\ N \oplus S_1,\ N \oplus S_2,\ S_1 \oplus S_2,\ L = N \oplus S_1 \oplus S_2,$$

pero ni S_1 ni $S_1 \oplus S_2$ son ideales al ser $[S_1, N] = N$, luego de nuevo se tiene el retículo 2.4 (I).

2.4.2. Retículo (II)

En este caso, representado en la figura 2.10, se tiene por el lema 2.4.1 que $L = S \oplus \mathcal{J}(L)$ con S simple o 1-dimensional y $N(L) = \mathcal{J}(L)$. Además, por

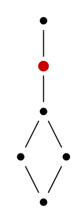


Figura 2.10: Retículo del caso (II).

el lema 2.4.2 se tiene que $C = A \oplus B$ es abeliano, siendo A y B los ideales minimales, luego centrales. Podemos ahora distinguir dos casos:

- $\mathcal{J}(L) = N(L) \subsetneq R(L) = L$,
- $\mathcal{J}(L) = N(L) = R(L) \subsetneq L$.

Por la descomposición de Levi sabemos que se corresponden con los casos S 1-dimensional y S simple respectivamente. Ahora, por el lema 2.4.1, sabemos que S actúa no trivialmente sobre todo subespacio $\operatorname{ad}_L S$-invariante de $N(L)/N(L)^2$. Cabe ahora preguntarse qué es $N(L)^2 \subseteq C$. Volvamos a distinguir por casos:

- Si $N(L) = R(L)$ entonces S es simple. Por el teorema 1.3.1 tenemos que N/N^2 se puede descomponer en módulos irreducibles, es decir, ideales minimales de L/N^2. Si $N^2 = 0$ la completa reducibilidad de N nos daría al menos 3 ideales minimales, lo que no es cierto. Así, sin pérdida de generalidad, podemos decir que $N^2 = A$ o $N^2 = C$.

- Si $N(L) \neq R(L)$ tenemos que $S = \langle x \rangle$. De nuevo podemos descartar que $N(L)^2 = 0$. Vamos a suponer que se tiene esta situación y vamos a ver cuáles pueden ser los factores irreducibles del polinomio característico de la matriz M asociada a $\operatorname{ad}_N x$.
    - Si dicho polinomio característico tiene un único factor irreducible $\pi(y)$ y $\dim(\ker \pi(M)) = \operatorname{gr} \pi$, tenemos un ideal minimal, no dos. Mientras que si $\dim(\ker \pi(M)) > \operatorname{gr} \pi$, existen tantos ideales minimales como el cardinal de $\mathbb{F}$ como ya vimos al descartar el tercer retículo de la figura 2.3.
    - Si tiene tres o más factores irreducibles tendrá tres o más ideales minimales. Absurdo.
    - Si tiene dos factores irreducibles π_1 y π_2 entonces, para que solo haya dos ideales minimales y no más, $\dim(\ker \pi_1(M)) = \operatorname{gr} \pi_1$ y $\dim(\ker \pi_2(M)) = \operatorname{gr} \pi_2$. Además, para que no se generen dos cadenas de ideales minimales paralelas se tiene que tener que el polinomio mínimo coincida con el característico. Por tanto
    $$N = \ker \pi_1(M) \oplus \ker \pi_2(M) \subseteq A \oplus B \subsetneq N,$$
    lo que es contradictorio.

  Es decir tampoco es posible que $N(L)^2 = 0$.

Así, independientemente de S, tenemos que $N^2 = A$ o $N^2 = C$. Como $N^2 \neq 0$, $C = Z(N)$ y por tanto $N^3 = 0$.

Por otro lado podemos notar que

- como $Z(N)$ es un ideal, entonces es $\operatorname{ad}_L S$ invariante, y los ideales de L contenidos dentro de él son subespacios $\operatorname{ad}_L S$ invariantes,
- todo subespacio de V de N tal que $N^2 \subseteq V \subseteq N$ cumple que $[N, V] \subseteq N^2 \subseteq V$. Luego V es ideal si y solo si V es $\operatorname{ad}_L S$-invariante.

Caso $S = \langle x \rangle$

En este caso, para que $C = Z(N)$ tenga dos ideales minimales, el polinomio característico de $\operatorname{ad}_{Z(N)} x$ tiene que tener dos factores irreducibles distintos. Llamemoslos π_1 y π_2. Además $\operatorname{ad} x|_{N/Z(N)}$ es irreducible y no trivial. Por tanto su polinomio característico es π_3 irreducible. En todos ellos $\dim(\ker \pi_i) = \operatorname{gr} \pi_i$. Veamos ahora cómo pueden ser los productos[4] de estos núcleos. Sean p_M y m_M los polinomios característico y mínimo respectivamente de $\operatorname{ad}_N x$, en función del valor π_3 tenemos dos opciones:

[4]Notar que existen condiciones adicionales para que dicho producto exista. Para que $[\ker \pi_i, \ker \pi_j] = \ker \pi_k$, todos ellos polinomios irreducibles, se necesita que las raíces de π_k formen parte del conjunto
$$\{a + b \mid a \text{ es raíz de } \pi_i \text{ y } b \text{ es raíz de } \pi_j\}.$$

1. $\pi_3 = \pi_1 \neq \pi_2$. Dentro de esta situación podemos de nuevo distinguir dos:

   a) Si $p_M = m_M = \pi_1^2\pi_2$. En este caso $\dim(\ker \pi_1) = \operatorname{gr} \pi_1$, mientras que $\dim(\ker \pi_2) = \operatorname{gr} \pi_2$, con A o B siendo el $\ker \pi_1 \subsetneq \ker \pi_1^2$ tal que $\dim(\ker \pi_1^2) = 2 \operatorname{gr} \pi_1$. Si llamamos V a un complemento $\ker \pi_1$ en $\ker \pi_1^2$ se tiene que $[V, V] = N^2$. En este caso $N^2 \neq A$ pues de serlo $V \oplus A$ sería un nuevo ideal. Por tanto $N^2 = C$.

   b) Si $p_M \neq m_M = \pi_1\pi_2$, se tiene que $\dim(\ker \pi_1) = 2 \operatorname{gr} \pi_1$, mientras que $\dim(\ker \pi_2) = \operatorname{gr} \pi_2$, con $A \subsetneq \ker \pi_1$ tal que $\dim A = \operatorname{gr} \pi_1$. De nuevo existe un subespacio V tal que $[V, V] = N^2 = C$.

2. $\pi_3 \neq \pi_1, \pi_2$. En este caso $N = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2 \oplus \ker \pi_3$. Cuando $N^2 = C$ se tiene que $[\ker \pi_3, \ker \pi_3] = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2$. Mientras que cuando $N^2 = A$ se tiene que $[\ker \pi_3, \ker \pi_3] = \ker \pi_1$. Pero entonces $\ker \pi_3 \oplus \ker \pi_1$ sería ideal. Absurdo.

Notar que ninguno de estos casos es posible por ejemplo en $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ ya que tenemos además las siguientes restricciones

- si $\pi_3 = \pi_1$ entonces $\operatorname{gr} \pi_1 \geq 4$,
- y si $\pi_3 \neq \pi_1, \pi_2$ entonces $\operatorname{gr} \pi_3 \geq 3$.

Veamos ahora que el recíproco es cierto. Sea $L = N \oplus \langle x \rangle$ entonces

1. $N = V \oplus A \oplus B$ $\operatorname{ad} x$-invariantes, tal que $B = \ker \pi_2$, $A \subseteq \ker \pi_1$ y $[V, V] = A \oplus B$. En este caso $A, B \subseteq Z(N)$ y son $\operatorname{ad} x$-invariantes, luego son ideales. Su suma es otro ideal, dejando a N y los triviales como los restantes hasta completar el retículo buscado.

2. $N = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2 \oplus \ker \pi_3$, con $\ker \pi_i$ $\operatorname{ad} x$-módulos irreducibles y $Z(N) = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2$. Como $\ker \pi_1$ y $\ker \pi_2$ son S-módulos y están en $Z(N)$ son ideales. Asimismo $Z(N)$ también lo es, junto con N. Estos junto con los ideales triviales nos dan el retículo esperado.

Caso S simple

Cuando S es simple por el teorema 1.3.1 podemos expresar N como suma de S-módulos irreducibles. Así $N = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ donde $Z(N) = V_1 \oplus V_2$ ambos no isomorfos. El único producto que no es nulo es $[V_3, V_3] = N^2$. Cuando $N^2 \subsetneq Z(N)$, es decir $V_1 = N^2$, tenemos que $V_1 \oplus V_3$ también sería un ideal. Absurdo.

En resumen, este retículo solo se puede dar cuando nuestra álgebra de Lie L es de la forma $L = N \oplus S$ con S simple, N un S-módulo que descompone como la suma de tres S-módulos irreducibles V_1, V_2 y V_3, donde al menos V_3 es un S-módulo no trivial, tal que $Z(N) = V_1 \oplus V_2$ y $[V_3, V_3] = V_1 \oplus V_2$. De hecho el recíproco es cierto. Cuando tenemos un álgebra de este tipo los ideales son

$$\{0\},\ V_1,\ V_2,\ N^2 = V_1 \oplus V_2,\ N = N^2 \oplus V_3,\ L = N \oplus S.$$

2.4.3. Retículo (III)

En este caso estamos ante la figura 2.11. Por el lema 2.4.1 sabemos que $L = N(L) \oplus T$ con T simple o 1-dimensional. Además, si denotamos por P al ideal minimal tenemos que L/P, por [2, Caso V(b)], tiene la forma:

- $L/P = \overline{N} \oplus \langle \overline{x} \rangle$ donde $\overline{N}$ es abeliano, $\mathrm{ad}_{\overline{N}}\, \overline{x}$ no singular y cíclica y con polinomio mínimo producto de dos irreducibles distintos.
- $L/P = \overline{N} \oplus \overline{S}$ donde $\overline{N}$ es abeliano, $\overline{S}$ simple, $\overline{N} = \overline{N_1} \oplus \overline{N_2}$ $\mathrm{ad}_{L/P}\, \overline{S}$-submódulos fieles irreducibles no isomorfos.

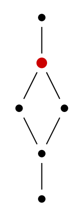


Figura 2.11: Retículo del caso (III).

El primer caso equivale a tener $L = R(L)$, siendo el segundo el correspondiente a $N(L) = R(L)$. En cualquier caso, como $N(L)/P$ es abeliano se tiene que $N(L)^2 \subseteq P$, luego $N^2 = 0$ o $N^2 = P$ y $N^3 = 0$. Vayamos caso por caso.

Caso $L = N \oplus \langle x \rangle$

En este caso podemos ver matricialmente a $\mathrm{ad}_N\, x$ como

	V	P
V	B	0
P	C	D

donde B, C, D y 0 son matrices, siendo esta última nula, $N = V \oplus N$ y

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Además, como ya habíamos visto al hacer el cociente L/P, se tiene que $p_B = m_B = \pi_1\pi_2$, con π_1, π_2 polinomios irreducibles distintos. Siendo $p_A = p_B p_D$ con $p_D = \pi_3$ irreducible al ser P minimal.

Gracias a esto podemos descartar que en este caso $N^2 = 0$. Pues de serlo, si $\pi_3 \neq \pi_1$ y $\pi_3 \neq \pi_2$ tendríamos al menos tres ideales minimales, mientras que si coincide con uno de ellos tendríamos mínimo dos. En cualquier caso absurdo, solo P es minimal. Es decir, $N^2 = P$ y en función de π_3 distinguimos

1. $\pi_3 = \pi_1 \neq \pi_2$. Dentro podemos de nuevo distinguir dos situaciones:

a) Si $p_A = m_A = \pi_1^2\pi_2$ entonces $\dim(\ker \pi_1(A)) = \operatorname{gr} \pi_1$, mientras que $\dim(\ker \pi_2(A)) = \operatorname{gr} \pi_2$, con $N^2 = \ker \pi_1(A) \subseteq \ker \pi_1^2(A)$. Llamamos V a un complemento de $\ker \pi_1(A)$ en $\ker \pi_1^2(A)$.

b) $p_A \neq m_A = \pi_1\pi_2$. En este caso $\dim(\ker \pi_1(A)) = 2 \operatorname{gr} \pi_1$, mientras que $\dim(\ker \pi_2(A)) = \operatorname{gr} \pi_2$, con $\dim N^2 = \operatorname{gr} \pi_1$ y $N^2 \subseteq \ker \pi_1(A)$. Llamemos V a un complemento de N^2 en $\ker \pi_1(A)$.

En ambas situaciones el producto dentro de N queda definido, por los productos $[V, V], [\ker \pi_2, \ker \pi_2]$ y $[V, \ker \pi_2]$. Notar que se tiene que cumplir que $V, \ker \pi_2 \not\subset Z(N)$ para evitar la aparición de nuevos ideales.

2. $\pi_3 \neq \pi_1, \pi_2$. En este caso $N = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2 \oplus \ker \pi_3$, donde $\ker \pi_3 = N^2$ ideal y los otros ideales son $\ker \pi_1 \oplus \ker \pi_3$ y $\ker \pi_2 \oplus \ker \pi_3$. De forma equivalente, el producto queda definido por $[\ker \pi_1, \ker \pi_1], [\ker \pi_2, \ker \pi_2]$ y $[\ker \pi_1, \ker \pi_2]$ con $\ker \pi_1, \ker \pi_2 \not\subset Z(N)$.

Como $N^2 = Z(N)$ es un módulo irreducible se trata un ideal minimal. Además, es el único que hay pues N es el único ideal maximal y cualquier ideal minimal I cumple que $I \subseteq N$ y es central. A vista de los productos, los otros ideales son $\ker \pi_1 \oplus N^2$ o $V \oplus N^2$ y $\ker \pi_2 \oplus N^2$, siendo el nulo, el total y N los restantes. Es decir, el álgebra tiene el retículo buscado.

Caso $L = N \oplus S$

En este caso, por el teorema 1.3.1, se tiene que

$$N/N^2 = A_1/N^2 \oplus \cdots \oplus A_k/N^2,$$

donde A_i/N^2 son subespacios $\operatorname{ad}_L S$-invariantes donde se actúa no de forma no trivial por el lema 2.4.1. Como hemos visto antes tenemos dos opciones para N^2.

- Si $N^2 = 0$ entonces, como solo hay un ideal minimal, se tendría que $k = 1$ y N sería irreducible y no lo es. Absurdo.
- Si $N^2 = P$, tendríamos que $k = 2$, pues en L/P hay dos ideales minimales y entonces N_1/P y N_2/P serían irreducibles.

Ahora, de nuevo haciendo uso del teorema 1.3.1, tenemos que

$$N = N^2 \oplus V_2 \oplus V_3,$$

donde V_2 y V_3 son S-módulos irreducibles no isomorfos y N^2 es un S-módulo irreducible. Como N^2 es abeliano tenemos que

$$N^2 = V_1 = [V_2, V_2] + [V_2, V_3] + [V_3, V_3].$$

Son estos tres productos y su nulidad los que nos llevan a distinguir distintas álgebras. Aunque, independientemente del si valen 0 o V_1, se tiene que $V_2, V_3 \not\subset Z(N)$ para evitar nuevos ideales minimales más allá de V_1.

Como ya ocurría en el caso resoluble se tiene el recíproco: todo álgebra de Lie con esta estructura tiene por retículo (III). A vista de los productos, y siguiendo el mismo razonamiento que en el caso simple se tiene que la lista de ideales es

$$\{0\},\ V_1,\ V_1 \oplus V_2,\ V_1 \oplus V_3,\ V_1 \oplus V_2 \oplus V_3,\ V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus S.$$

2.4.4. Retículo (IV)

En este caso, mostrado en la figura 2.12, podemos de nuevo hacer el cociente $L/\mathcal{J}(L)$ quedándonos el retículo 2.9b. Siguiendo el razonamiento que hicimos en el primer retículo estudiado llegamos a que

- $L/\mathcal{J}(L) = \langle x \rangle \oplus S$ con S simple y $\langle x \rangle$ el centro,
- $L/\mathcal{J}(L) = S_1 \oplus S_2$ con S_1, S_2 simples.

Mientras que si llamamos P al ideal minimal y hacemos el cociente por él, obtenemos que $L/P = N_1 \oplus \overline{T}$ donde $N_1 = \mathcal{J}(L)/P$ es un ideal abeliano y $\overline{T} \cong L/\mathcal{J}(L)$ como el ya descrito. En este caso N_1 es un $\mathrm{ad}_{L/P}\,\overline{T}$-módulo irreducible y fiel, de acuerdo con [2, Teorema 2.3 (XI)].

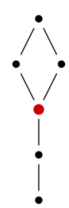


Figura 2.12: Retículo del caso (IV).

Notar antes de nada que, gracias a que $N_1 = N(L/P)$ y a que $\mathcal{J}(L)/P \subseteq N(L)/P \subseteq N(L/P)$, se tiene que $\mathcal{J}(L) = N(L)$. Así estamos buscando un álgebra de la forma:

- $L = N \oplus \langle x \rangle \oplus S$ con S simple y $[x, S] \subseteq N$.
- $L = N \oplus S_1 \oplus S_2$ con S_1, S_2 subálgebras simples con $[S_1, S_2] = 0$.

Denotamos $T = \langle x \rangle \oplus S$ o $T = S_1 \oplus S_2$. Si N no fuese un $\mathrm{ad}_L\,T$-módulo fiel entonces $\ker \mathrm{ad}_L\,T$ contendría otro ideal minimal. Absurdo. Como tenemos dos posibilidades $N^2 = 0$ o $N^2 = P$, veamos cuál se da. Si estamos en el caso $T = S_1 \oplus S_2$ simples, entonces por teorema 1.3.1 $N^2 = P$ por un razonamiento similar al hecho para el retículo (III). Mientras que cuando $T = \langle x \rangle \oplus S$ se tiene que N es un S-módulo. De nuevo por el mismo argumento de completa reducibilidad que ya usamos $N^2 = P$. Así N^2 y N/N^2 son $\mathrm{ad}\,T$-módulos irreducibles.

Dada esta situación el recíproco se tiene de forma directa. $N^2 \in Z(N)$ es ideal, N es ideal y las combinaciones de los elementos de componen T con N forman el resto de ideales propios del álgebra, obteniéndose el retículo (IV).

2.4.5. Retículo (V)

Este caso ha sido ampliamente estudiado en [1] para cadenas de longitud arbitraria. Así que únicamente nos limitaremos a enunciar cómo debe ser el álgebra de Lie en el caso de seis ideales (ver [1, Teorema 2.2]).

Lema 2.4.3. *Todo álgebra de Lie L con seis ideales en cadena presenta la siguiente estructura:*

1. *$L = N \oplus \langle x \rangle$, donde N es un ideal nilpotente no nulo, con índice de nilpotencia menor o igual que cinco, tal que $\mathrm{ad}_L\, x\,|_{N/N^2}$ es no singular y para cada ideal $K \neq L$, $\mathrm{ad}_L\, x\,|_{Z(N/K)}$ es cíclica con polinomio mínimo potencia de un irreducible.*

2. *$L = N \oplus S$, donde N es un ideal nilpotente no nulo de índice de nilpotencia 5, con N/N^2 un $\mathrm{ad}_L\, S$-módulo fiel y N^i/N^{i+1} son $\mathrm{ad}_L\, S$-módulos irreducibles para $1 \leq i \leq n-1$.*

Del primer tipo aquí descrito, en [1] aparece un estudio exhaustivo en el caso resoluble, obteniéndose la completa clasificación cuando $\mathrm{ad}_L\, x|_{N/N^2}$ escinde y para cualquier longitud de cadena. Esto cierra la clasificación sobre cuerpos algebraicamente cerrados de las álgebras de Lie resolubles con retículo de ideales en cadena. En el segundo tipo no se dispone de una clasificación cerrada. Es este hecho el que nos lleva, en el siguiente capítulo, a estudiarlo en busca de resultados similares o, al menos, que nos permitan conocer mejor cómo deben estructurarse estas álgebras. En él veremos construcciones donde tomaremos $S = \mathfrak{sl}_2$ y como módulos irreducibles

$$V_n = \langle x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^2 \rangle,$$

tomando las acciones ya descritas en la sección 1.3.1. Una caracterización y un procedimiento de construcción para esta clase de álgebras aparecen en los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.4.4 (ver [1])**.** *Sea L álgebra de Lie no resoluble sobre un cuerpo de característica cero. Los ideales de L forman una cadena de ideales si y solo si L es un álgebra simple o es la suma semidirecta de un ideal nilpotente N distinto de cero y un álgebra simple S tal que N/N^2 es un S-módulo fiel y $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ son S-módulos irreducibles a través de la representación adjunta. Además, en este caso, los términos de la serie central descendente de N coinciden con los términos de la serie central ascendente y, si $t+1$ es el índice de nilpotencia de N , los ideales de L son los $t+2$ ideales siguientes:*

$$0 \subseteq N^t \subseteq \cdots \subseteq N^i \subseteq \cdots \subseteq N \subseteq L.$$

Teorema 2.4.5 (ver [11])**.** *Sea L un álgebra de Lie con producto $[x, y]$, radical resoluble nilpotente N con índice de nilpotencia $t+1$ y descomposición de Levi* *no trivial $L = S \oplus N$ para algún álgebra de Lie semisimple S. Entonces, existe una descomposición no trivial de N en suma directa de S-módulos:*

$$N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus \cdots \oplus m_t,$$

donde $N^j = m_j \oplus N^{j+1}$, $m_j \subseteq [m_1, m_{j-1}]$ tal que m_1 es un S-módulo fiel y para $2 \leq j \leq t$, el submódulo m_j descompone como suma directa de un conjunto de componentes irreducibles de la representación del producto tensor $m_1 \otimes m_{j-1}$. Además m_2 es un submódulo del módulo 2-alternado $\Lambda^2 m_1$.

2.5. Conclusiones

A lo largo de esta última sección hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. *Sea L un álgebra de Lie con seis ideales no dispuestos en cadena entonces:*

1. *$L = \langle x \rangle \oplus S \oplus N$ tal que S es un álgebra simple, $[x, S] = 0$, N es un ideal abeliano y se da una de las siguientes situaciones*

   a) *$[S, N] = 0$ y $\mathrm{ad}_N\, x$ es cíclica no trivial con polinomio característico irreducible.*

   b) *$[x, N] = 0$ y N es un S-módulo irreducible no trivial.*

2. *$L = S_1 \oplus S_2 \oplus N$ tal que S_1, S_2 son subálgebras de Lie simples, S_2 es ideal de L, N es otro ideal, es abeliano y es un S_1-módulo irreducible no trivial.*

3. *$L = \langle x \rangle \oplus N$ con N ideal tal que $N^2 = Z(N)$. Y se da una de las siguientes situaciones (m y p polinomios mínimo y característico de $\mathrm{ad}_N\, x$):*

   a) *$m = \pi_1\pi_2$ y $p = \pi_1^2\pi_2$, con $N^2 = (N^2 \cap \ker \pi_1) \oplus \ker \pi_2$.*

   b) *$m = p = \pi_1^2\pi_2$, con $N^2 = \ker \pi_1 \oplus \ker \pi_2$.*

   c) *$m = p = \pi_1\pi_2\pi_3$, cumpliendo que $N^2 = \ker \pi_2 \oplus \ker \pi_3$.*

   donde π_1, π_2 y π_3 son irreducibles distintos y $\pi_1 \neq x$. Además, como $\dim N/N^2, \dim N^2 \geq 2$, se tiene que $\mathrm{gr}\, \pi_1 \geq 4$ en los dos primeros casos y $\mathrm{gr}\, \pi_1 \geq 3$ en el último.

4. *$L = S \oplus N$, con S una subálgebra simple y N un ideal tal que $N^2 = Z(N) = V_1 \oplus V_2$ con V_1 y V_2 S-irreducibles no isomorfos. Además $N = N^2 \oplus V_3$ con V_3 un S-submódulo no trivial.*

5. *$L = \langle x \rangle \oplus N$ con N un ideal tal que $N^2 = Z(N)$. Y se da una de las siguientes situaciones (m y p polinomios mínimo y característico de $\mathrm{ad}_N\, x$):*

   a) *$m = \pi_1\pi_2$ y $p = \pi_1^2\pi_2$, con $N^2 \subsetneq \ker \pi_1$.*

   b) *$m = p = \pi_1^2\pi_2$, con $N^2 = \ker \pi_1$.*

   c) *$m = p = \pi_1\pi_2\pi_3$, cumpliendo que $N^2 = \ker \pi_1$.*

donde π_1, π_2 y π_3 son irreducibles distintos y $\pi_1 \neq x$.

6. *$L = S \oplus N$, con S una subálgebra simple y N un ideal tal que $N^2 = Z(N)$ que es S-módulo irreducible. Además, $N = N^2 \oplus V_1 \oplus V_2$ no triviales y no isomorfos.*

7. *$L = \langle x \rangle \oplus S \oplus N$ tal que S es una subálgebra simple, $[x, S] = 0$, N es ideal, $N^2 = Z(N)$ es T-irreducible para $T = \langle x \rangle \oplus S$. Además $N = N^2 \oplus V_1$ con V_1 un T-submódulo irreducible fiel.*

8. *$L = S_1 \oplus S_2 \oplus N$ tal que S_1, S_2 son subálgebras simples, $[S_1, S_2] = 0$, N es ideal, $N^2 = Z(N)$ es T-irreducible para $T = S_1 \oplus S_2$. Además $N = N^2 \oplus V_1$ con V_1 un T-submódulo irreducible fiel.*

Además se tiene que

- *todo álgebra de Lie de la forma 1 y 2 tiene por retículo de ideales a (I),*
- *todo álgebra de Lie de la forma 3 y 4 tiene por retículo de ideales a (II),*
- *todo álgebra de Lie de la forma 5 y 6 tiene por retículo de ideales a (III),*
- *y todo álgebra de Lie de la forma 7 y 8 tiene por retículo de ideales a (IV);*

así como el recíproco.

Capítulo 3

Álgebras con seis ideales en cadena

Al final del anterior capítulo introdujimos las álgebras de Lie cuyo retículo de ideales es una cadena. Hemos visto que es posible construirlas básicamente de dos formas en función de su resolubilidad. A lo largo de este capítulo vamos a centrarnos en construir álgebras de seis ideales en cadena que no sean resolubles y cuyo factor de Levi sea simple.

3.1. Construcción general

i

Teorema 3.1.1. *Sea S un álgebra de Lie simple con producto $[s, s']$ para $s, s' \in S$ y sean m_1, m_2, m_3 y m_4 S-módulos irreducibles con representaciones $\rho_i : S \to \mathfrak{gl}(m_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ con ρ_1 fiel. Sean cualesquiera homomorfismos de S-módulos*

- $p_{112} : m_1 \otimes m_1 \to m_2$ *antisimétrico no nulo,*
- $p_{113} : m_1 \otimes m_1 \to m_3$ *antisimétrico,*
- $p_{114} : m_1 \otimes m_1 \to m_4$ *antisimétrico,*
- $p_{123} : m_1 \otimes m_2 \to m_3$ *no nulo,*
- $p_{134} : m_1 \otimes m_3 \to m_4$ *no nulo,*
- $p_{124} : m_1 \otimes m_2 \to m_4$ *y*
- $p_{224} : m_2 \otimes m_2 \to m_4$ *antisimétrico*

que además verifiquen para toda terna de elementos $v, v'v'' \in m_1$ *la identidad*

$$\begin{aligned} &p_{123}(v, p_{112}(v', v'')) + p_{124}(v'', p_{112}(v, v')) + p_{134}(v'', p_{113}(v, v')) \\ &\quad + p_{123}(v', p_{112}(v'', v)) + p_{124}(v, p_{112}(v', v'')) + p_{134}(v, p_{113}(v', v'')) \\ &+ p_{123}(v'', p_{112}(v, v')) + p_{124}(v', p_{112}(v'', v)) + p_{134}(v', p_{113}(v'', v)) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

y para toda terna $v, v' \in m_1$ *y* $u \in m_2$ *la identidad*

$$p_{134}(v, p_{123}(v', u) + p_{134}(v', -p_{123}(v, u)) + p_{224}(u, p_{112}(v, v')) = 0. \tag{3.2}$$

El espacio vectorial $\mathfrak{L}_S(m_1, m_2, m_3, m_4, p_{112}, p_{113}, p_{114}, p_{123}, p_{124}, p_{134}, p_{224}) = S \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$ *con el producto*

$$\begin{aligned} \langle s + t + u + v + w, s' + t' + u' + v' + w' \rangle = {} & [s, s'] + \rho_1(s)(t') + \rho_2(s)(u') \\ & + \rho_3(s)(v') + \rho_4(s)(w') + p_{112}(t, t') + p_{113}(t, t') + p_{114}(t, t') \\ & + p_{123}(t, u') + p_{124}(t, u') + p_{134}(t, v') - p_{123}(u, t') - p_{124}(u, t') \\ & - p_{134}(v, t') - \rho_1(s')(t) - \rho_2(s')(u) - \rho_3(s')(v) - \rho_4(s')(w) \end{aligned}$$

para $s, s' \in S$, $t, t' \in m_1$, $u, u' \in m_2$, $v, v' \in m_3$ *y* $w, w' \in m_4$, *proporciona un álgebra de Lie con 6 ideales dispuesto en la cadena:*

$$0 < m_4 < m_3 \oplus m_4 < m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 < m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 < L.$$

Además, todo álgebra de Lie no resoluble con 6 ideales en cadena coincide con una de las descritas anteriormente.

Demostración. Notar que decir que ρ_i es una representación equivale a decir que

$$\rho_i([s, s'])(v) = \rho_i(s)(\rho_i(s')(v)) - \rho_i(s')(\rho_i(s)(v)) \tag{3.3}$$

para $s, s' \in S$ y $v \in m_i$. Además, $m_i \otimes m_j$ es un S-módulo para $(i, j) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2)$. Basta tomar como representación

$$\rho_{i,j}(s)(v \otimes w) = \rho_i(s)(v) \otimes w + v \otimes \rho_j(s)(w),$$

para $v \in m_i, w \in m_j$ y $s \in S$. Mientras que decir que p_{ijk} es un homomorfismo equivale a decir que

$$\rho_k(s)(p_{ijk}(v \otimes w)) = p_{ijk}(\rho_{ik}(s)(v \otimes w)).$$

Una vez hechas estas observaciones pasemos a comprobar que, efectivamente, L es álgebra de Lie. El primer paso es ver que el producto es antisimétrico. En efecto

$$
\begin{aligned}
\langle s+t+u+v+w, s'+t'+u'+v'+w'\rangle &\\
&= [s,s'] + \rho_1(s)(t') + \rho_2(s)(u') + \rho_3(s)(v') + \rho_4(s)(w')\\
&+ p_{112}(t,t') + p_{113}(t,t') + p_{114}(t,t') + p_{123}(t,u') + p_{124}(t,u')\\
&+ p_{134}(t,v') - p_{123}(u,t') - p_{124}(u,t') - p_{134}(v,t')\\
&- \rho_1(s')(t) - \rho_2(s')(u) - \rho_3(s')(v) - \rho_4(s')(w)\\
&= -[s',s] - \rho_1(s')(t) - \rho_2(s')(u) - \rho_3(s')(v) - \rho_4(s')(w)\\
&- p_{112}(t',t) - p_{113}(t',t) - p_{114}(t',t) - p_{123}(u',t) - p_{124}(u',t)\\
&- p_{134}(v',t) + p_{123}(t',u) + p_{124}(t',u) + p_{134}(t',v)\\
&+ \rho_1(s)(t') + \rho_2(s)(u') + \rho_3(s)(v') + \rho_4(s)(w')\\
&= -\langle s'+t'+u'+v'+w', s+t+u+v+w\rangle.
\end{aligned}
$$

Así que solo nos queda comprobar que se cumple la identidad de Jacobi para toda terna de elementos en $S \cup m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup m_4$. Veámoslo caso por caso.

1. Sean $s, s', s'' \in S$ se tiene que

$$\langle\langle s,s'\rangle, s''\rangle = [[s,s'],s''].$$

   Como S es álgebra de Lie la identidad de Jacobi de cumple trivialmente.

2. Sea $s \in S$, $v \in m_i$ para $i = 1,2,3,4$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\langle\langle s,s'\rangle, v\rangle + \langle\langle s',v\rangle, s\rangle + \langle\langle v,s\rangle, s'\rangle &\\
&= \rho_i([s,s])(v) - \rho_i(s)(\rho_i(s')(v)) + \rho_i(s')(\rho_i(s)(v)),
\end{aligned}
$$

   lo que es cierto como hemos visto en (3.3).

3. Sea $s \in S$, $v, v' \in m_1$

$$
\begin{aligned}
\langle\langle s,v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v,v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v',s\rangle, v\rangle &\\
&= p_{112}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_2(s)(p_{112}(v,v')) - p_{112}(\rho_1(s)(v'), v)\\
&+ p_{113}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_3(s)(p_{113}(v,v')) - p_{112}(\rho_1(s)(v'), v)\\
&+ p_{114}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_4(s)(p_{114}(v,v')) - p_{112}(\rho_1(s)(v'), v) = 0.
\end{aligned}
$$

   Para conseguir la igualdad hemos utilizado que p_{11i}, $i = 2,3,4$ son homomorfismos de S-módulos antisimétricos, es decir cumplen

$$-p_{11i}(\rho_1(s)(v), v') = p_{11i}(v', \rho_1(s)(v)).$$

4. Sea $s \in S$, $v \in m_1$, $v' \in m_2$

$$
\begin{aligned}
\langle\langle s,v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v,v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v',s\rangle, v\rangle &\\
&= p_{123}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_3(s)(p_{123}(v,v')) + p_{123}(v, \rho_2(s)(v'))\\
&+ p_{124}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_4(s)(p_{124}(v,v')) + p_{124}(v, \rho_2(s)(v')) = 0,
\end{aligned}
$$

   ya que p_{123} y p_{124} son homomorfismos de S-módulos.

5. Sea $s \in S$, $v \in m_1$, $v' \in m_3$
$$\begin{aligned}&\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle \\ &\qquad = p_{134}(\rho_1(s)(v), v') - \rho_3(s)(p_{134}(v, v')) + p_{134}(v, \rho_3(s)(v')) = 0,\end{aligned}$$
dado que p_{134} es homomorfismo de S-módulos.

6. Sea $s \in S$, $v \in m_1$, $v' \in m_4$
$$\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle = 0,$$
pues en todos los factores hay involucrado un producto de un elemento de m_1 por otro de m_4 que es nulo.

7. Sea $s \in S$, $v, v' \in m_2$
$$\begin{aligned}&\langle\langle s, v\rangle, v'\rangle + \langle\langle v, v'\rangle, s\rangle + \langle\langle v', s\rangle, v\rangle \\ &\qquad = p_{224}(\rho_2(s)(v), v') - \rho_4(s)(p_{224}(v, v')) + p_{224}(v, \rho_2(s)(v')) = 0,\end{aligned}$$
al ser p_{224} un homomorfismo.

8. En los casos $s \in S$, $v \in m_2$, $v' \in m_i$ con $i = 3, 4$; $s \in S$, $v \in m_3$, $v' \in m_i$ con $i = 3, 4$; y $s \in S$, $v \in m_4$, $v' \in m_4$ la identidad se tiene de forma trivial al estar involucrado en cada término de la identidad de Jacobi un producto nulo.

9. Sea $v, v', v'' \in m_1$ la identidad de Jacobi se tiene al ser equivalente a la condición (3.1).

10. Sea $v, v' \in m_1$, $u \in m_2$ la identidad de Jacobi se satisface al ser equivalente a la ecuación (3.2).

11. El resto de productos entre términos de $m_1 \cup m_2 \cup m_3 \cup m_4$ no se detallan, pues en todos ellos cada término de la identidad de Jacobi se anula de forma directa al tener algún producto nulo.

Observamos ahora que L verifica las siguientes propiedades

1. $L^2 = L$. En efecto,
$$\begin{aligned}L^2 &= \langle S, S\rangle + \langle S, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle + \langle S, m_3\rangle + \langle S, m_4\rangle \\ &\quad + \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle + \langle m_1, m_3\rangle + \langle m_2, m_2\rangle \\ &= S^2 \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4 = L,\end{aligned}$$
ya que
   - $\langle S, S\rangle = S$ al ser S simple,
   - $\langle S, m_1\rangle = m_1$ al ser ρ_1 fiel y ser m_1 irreducible,
   - $\langle m_1, m_i\rangle = m_{i+1}$ al ser $p_{1i(i+1)}$ un homomorfismo de S-módulos no nulo y m_{i+1} irreducible para $i = 1, 2, 3$.

2. $N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$ es un ideal nilpotente con índice de nilpotencia 5 tal que $N^2 = m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$, $N^3 = m_3 \oplus m_4$, $N^4 = m_4$ y $N^5 = 0$. Veamos primero que es un ideal. Efectivamente

$$\begin{aligned}\langle L, N\rangle &= \langle S, m_1\rangle + \langle S, m_2\rangle + \langle S, m_3\rangle + \langle S, m_4\rangle \\ &\quad + \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle + \langle m_1, m_3\rangle + \langle m_2, m_2\rangle = N.\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}N^2 = \langle N, N\rangle &= \langle m_1, m_1\rangle + \langle m_1, m_2\rangle + \langle m_1, m_3\rangle + \langle m_2, m_2\rangle \\ &= m_2 \oplus m_3 \oplus m_4,\end{aligned}$$

$$N^3 = \langle N, N^2\rangle = \langle m_1, m_2\rangle + \langle m_1, m_3\rangle + \langle m_2, m_2\rangle = m_3 \oplus m_4,$$

$$N^4 = \langle N, N^3\rangle = \langle m_1, m_3\rangle = m_4.$$

3. $R(L) = N(L) = N$ al ser N nilpotente y ser el mayor ideal resoluble.

Ahora para ver que únicamente tiene los 6 ideales formando una cadena ya encontrados vamos a hacer uso del teorema 2.4.4. Para poder aplicarlo necesitamos ver que $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ son S-módulos irreducibles. Es directo ver que $Z_2(N) = Z(N) = m_4$, mientras que $Z_5(N) = N$. Además sabemos que

$$Z_1(N) \subsetneq Z_2(N) \subsetneq Z_3(N) \subsetneq Z_4(N) \subsetneq Z_5(N),$$

donde cada $Z_i(N)$ es un S-módulo. Aplicando el Teorema de Weyl (1.3.1) podemos concluir que $Z_i(N) = N^{6-i}$ con $i = 1, \ldots, 5$, luego $Z_i(N)/Z_{i-1}(N) \cong m_{6-i}$ irreducible. Así, como se cumplen las hipótesis del teorema, sabemos que tenemos el retículo deseado.

Finalmente veamos que todo álgebra no resoluble cuyo retículo está formado por seis ideales en cadena se puede escribir como una de estas. Sea L de este tipo, aplicando los teoremas 2.4.4 y 2.4.5 tenemos que $L = S \oplus N$, donde S es simple y $N = N(L) = R(L)$ formando la cadena de ideales

$$0 \subsetneq N^4 \subsetneq N^3 \subsetneq N^2 \subsetneq N \subsetneq L.$$

Añadir que podemos ver N como un S-módulo tomando la representación $\mathrm{ad}_N S$ al ser N un ideal. Aplicando la completa reducibilidad de N por el teorema de Weyl llegamos a que

$$N = m_1 \oplus N^2 = m_1 \oplus m_2 \oplus N^3 = m_1 \oplus m_2 m_3 \oplus \oplus N^4 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4.$$

con $Z_i(N) = N^{6-i}$ y m_i S-módulos irreducible, tal que m_1 es fiel. Estas representaciones vienen dadas por

$$\rho_i(s)(v) = [s, v]$$

para $v \in m_i$. Ahora, si denotamos $[u, v]_i$ la proyección de $[u, v]$ sobre m_i dados $u, v \in L$, tenemos que

$$\begin{aligned} p_{1ij} \colon m_1 \otimes m_i &\to m_j \\ (u, v) &\mapsto [u, v]_j \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_{224} \colon m_2 \otimes m_2 &\to m_4 \\ (u, v) &\mapsto [u, v]_4 \end{aligned}$$

son S-homomorfismos de módulos gracias a que cumplen la identidad de Jacobi para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = i + 1, \ldots, 4$. Además p_{11j} y p_{224} son antisimétricos por definición y $p_{1i(i+1)}$ no nulos al tenerse $N^i \neq N^{i+1} = [N, N^i]$. □

A raíz de este teorema podemos notar que (3.1) está en $m_3 \oplus m_4$. Así que tanto la proyección de esta sobre m_3, como la de m_4 deben ser nulas. La proyección de (3.1) sobre m_3 es

$$p_{123}(v, p_{112}(v', v'')) + p_{123}(v', p_{112}(v'', v)) + p_{123}(v'', p_{112}(v, v')) = 0. \qquad (3.4)$$

Notar que esto es condición suficiente para que ver si el álgebra construida es o no álgebra de Lie, ya que

1. si no se cumple esta condición mínima ya no puede ser álgebra de Lie,
2. y si sí que se cumple, basta tomar p_{124} y p_{113} nulas para hacer la proyección sobre m_4 nula y tener un álgebra con productos definidos que satisface (3.1).

Es decir, esto es suficiente y necesario para garantizar la existencia aunque no la unicidad. Puede que existan otras álgebras tomando alguno de esos productos no nulos. Estos casos no quedará otro remedio que estudiarlos mediante la identidad (3.1).

La ventaja adicional que presenta estudiar L mediante este planteamiento es que en [10] se encuentran resultados que nos permiten conocer en muchos casos cuándo los $L/m_4 \cong S \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$ dan un álgebra de Lie. Y en los casos ahí no contemplados la identidad a probar es más sencilla.

3.2. Construcción para $S = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$

Cuando S es $\mathfrak{sl}_2$ los m_i, irreducibles, son isomorfos a módulos V_n, denotados en forma estándar como $V(n)$, con

$$V(n) = \langle x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2 \ldots, xy^{n-1}, y \rangle$$

como ya vimos en la sección 1.3.1. Los productos entre estos módulos dados por los homomorfismos p_{ijk} quedan determinados, salvo múltiplo escalar, por las transvecciones correspondientes. Así,

$$\begin{aligned}
p_{112} &= \alpha_1(\cdot,\cdot)_k \colon V(n) \times V(n) \to V(2n-2k),\\
p_{113} &= \alpha_2(\cdot,\cdot)_{k+r-n/2} \colon V(n) \times V(n) \to V(3n-2k-2r),\\
p_{114} &= \alpha_3(\cdot,\cdot)_{k-n+p+r} \colon V(n) \times V(n) \to V(4n-2k-2r-2p),\\
p_{123} &= \alpha_4(\cdot,\cdot)_r \colon V(n) \times V(2n-2k) \to V(3n-2k-2r),\\
p_{124} &= \alpha_5(\cdot,\cdot)_{r+p-n/2} \colon V(n) \times V(2n-2k) \to V(4n-2k-2r-2p),\\
p_{134} &= \alpha_6(\cdot,\cdot)_p \colon V(n) \times V(3n-3k-2r) \to V(4n-2k-2r-2p),\\
p_{224} &= \alpha_7(\cdot,\cdot)_{r+p-k} \colon V(2n-2k) \times V(2n-2k) \to V(4n-2k-2r-2p),
\end{aligned}$$

donde los S-módulos son $m_1 = V(n)$, $m_2 = V(2n-2k)$, $m_3 = V(3n-2k-2r)$ y $m_4 = V(4n-2k-2r-2p)$, los $\alpha_i \in \mathbb{F}$ y $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6$ no nulos.

3.2.1. Algoritmo de construcción

A vista del teorema 3.1.1 y sus resultados posteriores, y tomando las particularidades del caso $S = \mathfrak{sl}_2$, llegamos a una idea de implementación de un algoritmo que nos permita calcular todas las álgebras de Lie dado un $\mathfrak{sl}_2$-módulo irreducible m_1 inicial. Este algoritmo tiene objetivos similares a los que encontramos en [10] y [3], aunque debido a las particularidades del caso que nos ocupa, no cuentan los tres con la misma implementación. La idea de nuestro algoritmo es:

1. Dado $m_1 = V(n)$, calcular todos los posibles $m_2 = V(2n-2k)$, con $k = 1, \ldots, n$ e impar. Es decir, obtener los factores irreducibles de $\Lambda^2 m_1$.

2. Dado $m_1 = V(n)$ y $m_i = V(m)$, calcular los posibles $m_{i+1} = V(n+m-2k)$, con $k = 0, \ldots, \text{mín}(n, m)$. Es decir, obtener los factores de $m_1 \otimes m_i$.

3. Repetir el paso 2. dos veces hasta tener las posibles todas la posibles 4-tuplas (m_1, m_2, m_3, m_4) candidatas a ser parte de un álgebra de Lie.

4. Para cada terna hacer una serie de comprobaciones:

   a) Comprobar si se satisface la identidad (3.4), que llevada a transvecciones nos quedaría

   $$(v, (v', v'')_k)_r + (v', (v'', v)_k)_r + (v'', (v, v')_k)_r = 0, \qquad (3.5)$$

   para v, v', v'' tres elementos cualesquiera de m_1. Si no se satisface se termina con esta tupla y se pasa a la siguiente, ya que no podría ser ya álgebra de Lie.

   b) Comprobar si dados $v, v' \in m_1$ y $u \in m_2$ se satisface la identidad

   $$(v, (v', u)_r)_p - (v', (v, u)_r)_p = 0. \qquad (3.6)$$

   Si lo hace tenemos ya un álgebra de Lie y podemos pasar a comprobar la siguiente tupla.

c) En caso de que (3.6) haya fallado, calculamos si existe algún $\alpha \neq 0$ que satisfaga la identidad

$$(v,(v',u)_r)_p - (v',(v,u)_r)_p + \alpha(u,(v,v')_k)_{r+p-k} = 0. \tag{3.7}$$

De nuevo, si existe hemos encontrado un álgebra, si no, esta 4-tupla no funciona. En cualquier caso debemos pasar a estudiar la siguiente candidata.

A la hora de implementar este algoritmo, cuyo código en lenguaje Mathematica se puede encontrar en el apéndice A, se observó que los tiempos de ejecución eran elevados. Así que de cara a acelerar su ejecución se tomaron varias consideraciones:

1. Cuando haya que probar si un álgebra de Lie cumple la identidad de Jacobi, solo deberemos verificar las ternas cuyos elementos sean todos distintos. Esto se debe a que el corchete de Lie es bilineal y antisimétrico. Es decir,

$$[a,a]=0, \qquad [0,a]=0, \qquad [a,b]=-[b,a], \qquad [a,-b]=-[a,b].$$

Luego de haber dos o más elementos iguales la identidad de Jacobi se cumple trivialmente. En efecto,

$$[[a,a],b]+[[a,b],a]+[[b,a],a]=[0,b]+[[a,b],a]-[[a,b],a]=0.$$

Esto reduce en un álgebra de n elementos el número de comprobaciones de productos en $m_1 = V(n)$ de

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=j}^{n} 1 = \frac{1}{6}\left(n^3+6n^2+11n+6\right)$$

a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n} 1 = \frac{1}{6}\left(n^3-n\right),$$

y en ternas de dos elementos en $m_1 = V(n)$ y otro en $m_2 = V(2n-2k)$ de

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=0}^{2n-2k} 1 = \frac{1}{2}\left(-2kn^2-6kn-4k+2n^3+7n^2+7n+2\right)$$

operaciones a

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1}\sum_{k=0}^{2n-2k} 1 = \frac{1}{2}\left(-2kn^2-2kn+2n^3+3n^2+n\right)$$

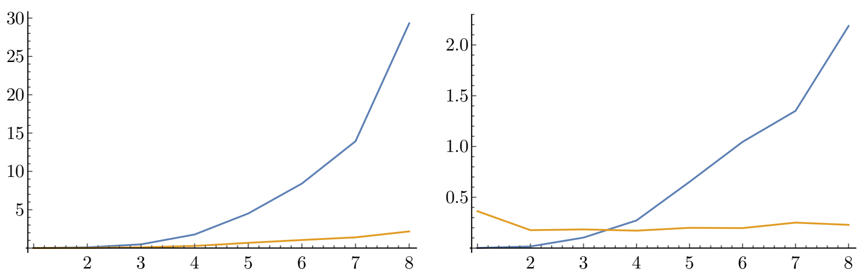
Para hacernos una idea de estos números, por ejemplo en $V(n)=V(3)$ pasamos de hacer 80 comprobaciones de Jacobi a hacer tan solo 40.

2. Como necesitamos que p_{224} de no ser nula sea antisimétrica y esta está definida como la transvección $r + p - k$, se tiene que dar que este número sea impar y positivo. Así, de no serlo ya sabemos que (3.7) no se va a satisfacer salvo para $\alpha = 0$. Pero este es precisamente (3.6). Es decir, de ser $r + p - k$ par o negativo nos podemos ahorrar el paso 4c) de nuestro algoritmo.

3. Hemos almacenado resultados que pueden ser necesarios más adelante para evitar repetir las operaciones.

4. Además se han creado versiones paralelizando ciertas partes del algoritmo para que se realicen las comprobaciones en vez de una en una en bloques.

En la figura 3.1 se puede ver una comparativa[1] de los tiempos de ejecución de la comprobación de todos los S-módulos para $n \leq 8$.



(a) En azul la versión original y en naranja teniendo en cuenta las optimizaciones 1 y 2.

(b) En azul la versión original y en naranja teniendo en cuenta las optimizaciones 1, 2 y 4.

Figura 3.1: Comparativa de tiempos de ejecución del algoritmo para $n \leq 8$.

Son precisamente estas tuplas que generan álgebras de Lie las que se muestran, en forma de árboles, en los diagramas que componen la portada.

Notar que en (3.5) y (3.6) no aparecen constantes α_i pues todos los sumandos involucran a las mismas transvecciones, luego por linealidad salen y, sabiendo que no son productos nulos, al igualarse a cero se pueden simplificar. De hecho, sin pérdida de generalidad, podemos mediante reescalamientos en la base tomar $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_6 = 1$.

Sin embargo, el tercer sumando de (3.7) sí que presenta esta constante al aparecer en ese último término otras transvecciones y, por tanto, otras constantes que no podemos simplificar con las demás. Aunque este término no añade muchas álgebras, pues de existir un α que satisfaga (3.7) este es único. Esto se debe a que buscar un α que cumpla esa ecuación consiste en encontrar la solución

[1]No se ha incluído en ninguna gráfica cómo afecta la mejora propuesta 3, pues se han puesto gráficas de tiempos medios de ejecución. Lo que no tendría sentido con esta mejora al ser la primera ejecucución más lenta y además equiparable a las aquí mostradas.

de un sistema de ecuaciones lineales en una incógnita. Sistema obtenido como el resultado de igualar a cero los coeficientes de los términos de la base de m_4, obtenidos de hacer las transvecciones. Notar que también podría tenerse que α sea libre cuando

$$(u,(v,v')_k)_{r+p-k} = 0. \tag{3.8}$$

Este caso podría llegar a darse cuando $m_1 = V(0)$ o $m_2 = V(0)$.

- Si $m_1 = V(0)$ se tiene que $\Lambda^2 V(0) = \{0\}$. Luego no hay álgebras que estudiar y podemos descartar esta situación ya que N sería abeliano.
- Si $m_1 = V(n)$ y $m_2 = V(0)$ se tiene que tener n impar, $k = n$ y, como $m_1 \otimes m_2 = m_3$, $r = 0$. Luego para que (3.8) sea cero se tiene que tener que $r \neq n$. Sin embargo este caso solo se podría dar para $n = 1$ como se prueba en [1, Lema 3.2] y en dicho caso no se cumple como ya veremos.

Es decir, a lo sumo existe un α que satisface (3.7).

3.2.2. Resultados obtenidos

Una vez tenemos el algoritmo lo ejecutamos para ver qué tuplas dan álgebras de Lie y cuáles no. En el apéndice B se pueden ver los resultados completos obtenidos para $n \leq 6$. Mientras que aquí incluimos un extracto de esos resultados con únicamente las álgebras que han cumplido las identidades y por tanto son álgebras de Lie. Esta información se recoge en el cuadro 3.1.

A la vista de estos resultados y de lo que ocurre hasta $n = 30$ planteamos las siguientes hipótesis[2]:

1. La tupla $(n,1,0,0)$ es decir, $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2) \oplus V(4n-2)$, genera un álgebra de Lie para todo $n \geq 1$ con $\alpha = 0$.
2. La tupla $(n,1,0,2)$ es decir, $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2) \oplus V(4n-6)$, genera un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ con $\alpha = \frac{4(4n-3)}{3(3n-2)}$.
3. La tupla $(n,1,1,1)$ es decir, $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-4) \oplus V(4n-6)$, genera un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ con $\alpha = \frac{2n-2}{3n-4}$.

Notar que en el apéndice B muchas de las construcciones son descartadas en la primera identidad de Jacobi (3.5). Esto se debe a que

$$L/N^4 \cong S \oplus m_1 \oplus m_2 \oplus m_3$$

no es álgebra de Lie. Estas álgebras con cinco ideales en cadena ya fueron estudiadas en [10]. Así que nosotros, de querer descartar las nuevas, debemos centrarnos en probar resultados para las álgebras mostradas en el apéndice C. Todas ellas aparecen junto a un ejemplo de terna que da problemas. Al poner

[2]Para inferir algunas de ellas se han necesitado resultados para valores de n mayores. Una vez conocidos se han estudiado qué relaciones de tipo $\frac{an+b}{cn+d}$ seguían las α obtenidas.

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	α
1	1	0	0	$V(1) \times V(0) \times V(1) \times V(2)$	0
2	1	0	0	$V(2) \times V(2) \times V(4) \times V(6)$	0
2	1	0	2	$V(2) \times V(2) \times V(4) \times V(2)$	5/3
2	1	1	1	$V(2) \times V(2) \times V(2) \times V(2)$	1
3	1	0	0	$V(3) \times V(4) \times V(7) \times V(10)$	0
3	1	0	2	$V(3) \times V(4) \times V(7) \times V(6)$	12/7
3	1	1	1	$V(3) \times V(4) \times V(5) \times V(6)$	4/5
3	1	1	3	$V(3) \times V(4) \times V(5) \times V(2)$	7/5
3	1	3	1	$V(3) \times V(4) \times V(1) \times V(2)$	-2
4	1	0	0	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(14)$	0
4	1	0	2	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(10)$	26/15
4	1	1	1	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(10)$	3/4
4	1	3	3	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(2)$	3/2
4	3	1	3	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(2)$	1/2
5	1	0	0	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(18)$	0
5	1	0	2	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(14)$	68/39
5	1	1	1	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(14)$	8/11
5	1	3	5	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(2)$	22/21
5	3	1	5	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(2)$	12/7
6	1	0	0	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(22)$	0
6	1	0	2	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(18)$	7/4
6	1	1	1	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(18)$	5/7
6	1	3	5	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(6)$	1

Cuadro 3.1: Álgebras de Lie para $n \leq 6$.

que falla en (a, b, c) quiere decir que la terna $x^{n-a}y^a$, $x^{n-b}y^b \in V(n) = m_1$ y $x^{2n-2k-c}y^c \in V(2n-2k) = m_2$ no satisface la identidad de Jacobi. Así que podríamos ir comprobando que efectivamente es así en cada caso.

Aunque no se muestre en el cuadro 3.1, para $7 \leq n \leq 30$, las únicas álgebras de Lie se tienen en los casos $(n, k, r, p) = (n, 1, 0, 0), (n, 1, 0, 2)$ y $(n, 1, 1, 1)$.

3.2.3. Lemas y conjeturas

Antes de poder probar nuestras hipótesis debemos introducir las conocidas como identidades de Gordan, que aparecen en [5]. Estas son una serie de relaciones que cumplen las transvecciones que nos van a resultar útiles durante las demostraciones.

Definición 3.2.1 (Identidad de Gordan)**.** Sean $f \in V_n$, $g \in V_m$ y $h \in V_p$, y sean α_1, α_2 y α_3 enteros no negativos que verifican que $\alpha_1 + \alpha_2 \leq p$, $\alpha_2 + \alpha_3 \leq m$,

$\alpha_3 + \alpha_1 \leq n$, con $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_2 + \alpha_3 = m$. Entonces se cumple que

$$\begin{bmatrix} f & g & h \\ m & n & p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f & g & h \\ m & n & p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} &= \sum_{i\geq 0} \frac{\binom{n-\alpha_1-\alpha_3}{i}\binom{\alpha_2}{i}}{\binom{m+n-2\alpha_3-i+1}{i}}((f,g)_{\alpha_3+i},h)_{\alpha_1+\alpha_2-i} \\ &+ (-1)^{\alpha_1+1}\sum_{i\geq 0} \frac{\binom{p-\alpha_1-\alpha_2}{i}\binom{\alpha_3}{i}}{\binom{m+p-2\alpha_2-i+1}{i}}((f,h)_{\alpha_2+i},g)_{\alpha_1+\alpha_3-i}.\end{aligned}$$

Veamos ahora que las tres hipótesis planteadas en la sección 3.2.2 son correctas. Como en todos los casos tenemos $k = 1$, debemos en todos ellos probar Jacobi para ternas (f, g, h) tal que $f, g \in V(n)$ y $h \in V(2n-2)$. Así vamos a introducir las siguientes simplificaciones a la hora de referirnos a las identidades de Gordan.

Notación 3.2.1. Denotaremos por $[h, f, g, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_1$, $[f, h, g, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_2$ y $[f, g, h, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_3$ a

$$\begin{bmatrix} h & f & g \\ 2n-2 & n & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f & h & g \\ n & 2n-2 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} f & g & h \\ n & n & 2n-2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

Notación 3.2.2. Denotamos

$$\begin{aligned}[f, g, h, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_\star &= [f, g, h, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_3 - [g, f, h, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_3 \\ &+ [g, h, f, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_2 - [h, g, f, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_1 \\ &+ [h, f, g, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_1 - [f, h, g, n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]_2,\end{aligned}$$

para $f, g \in V(n)$ y $h \in V(2n-2)$. Esta expresión procede de hacer todas las permutaciones de la terna (f, g, h) multiplicando cada una de ellas por el signo de la permutación.

Lema 3.2.1. *La tupla* $(n, 1, 0, 0)$ *es decir,* $V(n)\oplus V(2n-2)\oplus V(3n-2)\oplus V(4n-2)$, *genera un álgebra de Lie para todo* $n \geq 1$ *con* $\alpha = 0$.

Demostración. Probar que es álgebra de Lie, ya que (3.5) ha sido probada en [10, Lema 2.3.1], consiste en probar (3.6). Para probarlo vamos a emplear el término $[f, g, h, n, 0, 0, 0]_3$ de Gordan. Desarrollando dicho término obtenemos que

$$((f, g)_0, h)_0 - ((h, f)_0, g)_0 = 0,$$

con $f, g \in V(n)$ y $h \in V(2n-2)$. Que es precisamente la identidad que queremos probar. □

Lema 3.2.2. *La tupla $(n, 1, 0, 2)$ es decir, $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2) \oplus V(4n-6)$, genera un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ con $\alpha = \frac{4(4n-3)}{3(3n-2)}$.*

Demostración. Probar que es álgebra de Lie, ya que (3.5) ha sido probada en [10, Lema 2.3.1], consiste en probar (3.6). En este caso esto equivale a ver que

$$(f, (g, h)_0)_2 - (g, (f, h)_0)_2 + \frac{4(4n-3)}{3(3n-2)}(h, (f, g)_1)_1 = 0,$$

donde $f, g \in V(n)$ y $h \in V(2n-2)$. Denotamos

$$G = [f, g, h, n, 0, 1, 1]_3 + [g, h, f, n, 0, 1, 1]_2 + [h, f, g, n, 0, 1, 1]_1 \cdot \frac{2n-3}{n-1},$$

que es precisamente la identidad que empleamos en el lema 3.2.3. En ese caso la identidad que queremos probar sale de

$$G + H \cdot \frac{(n-2)(3n-2)(5n-6)}{(4-3n)^2(11n-6)} = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} H = ([h, g, f, n, 0, 0, 2]_1 - [h, f, g, n, 0, 0, 2]_1) \cdot \frac{9n-12}{10n-12} \\ - [f, g, h, n, 0, 0, 2]_\star \cdot \frac{3n-4}{n-2}. \end{aligned}$$

Notar que esta prueba solo vale para $n \geq 3$ al aparecer en un denominador el término $(n-2)$. Para probar el caso $n = 2$ debemos utilizar los términos de Gordan

$$\begin{aligned} 3[g, f, h, 2, 0, 0, 2]_3 + [g, h, f, 2, 0, 0, 2]_2 - 3[f, g, h, 2, 0, 0, 2]_3 \\ - [f, h, g, 2, 0, 0, 2]_2 + 3G = 0, \end{aligned}$$

donde esta G aparece lógicamente evaluada en $n = 2$. □

Lema 3.2.3. *La tupla $(n, 1, 1, 1)$ es decir, $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-4) \oplus V(4n-6)$, genera un álgebra de Lie para todo $n \geq 2$ con $\alpha = \frac{2n-2}{3n-4}$.*

Demostración. Probar que es álgebra de Lie, ya que (3.5) se verifica como se puede ver en [10, Lema 2.3.2], consiste en probar (3.7). En este caso esto equivale a ver que

$$(f, (g, h)_1)_1 - (g, (f, h)_1)_1 + \frac{2n-2}{3n-4}(h, (f, g)_1)_1 = 0$$

donde $f, g \in V(n)$ y $h \in V(2n-2)$. Esto es cierto ya que es equivalente a

$$[f, g, h, n, 0, 1, 1]_3 + [g, h, f, n, 0, 1, 1]_2 + [h, f, g, n, 0, 1, 1]_1 \cdot \frac{2n-3}{n-1} = 0.$$

□

Además de estos lemas hemos llegado a plantear las siguientes conjeturas.

Conjetura 3.2.1. *Sea* (n_0, k, r, p) *una tupla que falla en* (a, b, c)*, entonces* (n, k, r, p) *falla en* (a, b, c) *para todo* $n \geq n_0$*.*

Conjetura 3.2.2. *Las tuplas* $(n, 1, 0, 0)$*,* $(n, 1, 0, 2)$ *y* $(n, 1, 1, 1)$*, es decir,* $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2) \oplus V(4n-2)$*,* $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-2) \oplus V(4n-6)$ *y* $V(n) \oplus V(2n-2) \oplus V(3n-4) \oplus V(4n-6)$ *respectivamente, son las únicas que generan álgebras de Lie para* $n \geq 7$*.*

Lamentablemente no hemos podido llegar a demostrarlas. La primera conjetura sí que es posible demostrar que, por ejemplo para una tupla como $(1, 1, 0, 1)$ que falla en $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, es cierta. En efecto, la tupla $(n, 1, 0, 1)$ aunque satisface (3.5) como podemos ver en [10, Lema 2.3.1], no cumple la segunda identidad. Como $r + p - k = 0$ no es impar, debemos comprobar la identidad (3.6), que en nuestro caso es

$$(v, (v', u)_0)_1 - (v', (v, u)_0)_1 = 0. \tag{3.9}$$

Sean $v = x^n, v' = x^{n-1}y \in V(n)$ y $u = x^{2n-2} \in V(2n-2)$, sustituyendo en (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
(x^n, (x^{n-1}y, x^{2n-2})_0)_1 &- (x^{n-1}y, (x^n, x^{2n-2})_0)_1 \\
&= (x^n, yx^{3n-3})_1 - (x^{n-1}y, x^{3n-2})_1 \\
&= \frac{1}{n^2-2n} n x^{4n-4} + \frac{1}{n^2-2n}(3n-2)x^{4n-4} \\
&= \frac{(4n-2)x^{4n-4}}{(n-2)n} \neq 0.
\end{aligned}$$

Para ver que falla hemos probado con esos elementos de la base siguiendo las indicaciones de la tabla del apéndice C.

Sin embargo no hemos encontrado una forma general de probar dicho resultado y para cada dimensión surgen nuevas tuplas que fallan con lo que la tarea no es abordable caso por caso. Es precisamente este mismo impedimento a la hora de descartar álgebras de forma general el que nos ha impedido probar también la segunda conjetura. Lo único que hemos podido observar es que nuestra conjetura se cumple hasta $n = 30$ mediante la ejecución de nuestro algoritmo.

Conclusiones

Este trabajo me ha servido para introducirme en las álgebras de Lie. He aprendido sus fundamentos, para luego tratar de llegar a obtener resultados. El hecho de enfrentarme a estas estructuras, tan desconocidas para mí antes de empezar este Trabajo Fin de Máster, ha supuesto un verdadero reto, aunque ha merecido la pena.

He aprendido y mejorado, no solo de los resultados aquí reflejados, sino sobretodo de las dificultades encontradas. Estudiar todos los retículos y probar qué álgebras los forman, de antemano, ya se veía que requería de esfuerzo, al no limitarse a cuerpos algebraicamente cerrados. Pero ha sido en el último capítulo donde más dificultades inesperadas han surgido. El trabajo [1] probaba que existían formas generales de construcción para las álgebras superresolubles con seis ideales en cadena. Esto hacía pensar que en el caso no resoluble podía ocurrir algo similar. Además teníamos las cadenas con cinco ideales estudiadas en [10]. Pero el hecho de añadir un nuevo módulo hace que, para comprobar si la construcción proporciona un álgebra de Lie, se tengan que satisfacer nuevas identidades que dependen de variables y el número de casos posibles crezca enormemente. Además, las identidades de Gordan, que eran la vía para probar resultados, en este situación alcanzaban gran complejidad. Es precisamente esta complejidad y gran casuística la que solo nos ha permitido probar cuándo estamos ante un álgebra de Lie, mientras que para los casos negativos solo tenemos un algoritmo y conjeturas.

Hubiera sido interesante con más tiempo haber seguido intentado encontrar algún patrón más allá, que nos permitiese cerrar la demostración de todo lo enunciado. Trabajos que quedan abiertos a una continuación. Pero hemos terminado satisfechos con los conocimientos adquiridos y resultados obtenidos. No siempre en Matemáticas se puede llegar a probar todo lo que uno quiere a la primera. Y es importante encontrarse con casos así y no frustrarse.

Bibliografía

[1] Benito, P.: *Lie algebras in which the lattice formed by the ideals is a chain.* Communications in Algebra, 20(1):93–108, 1992.

[2] Benito, P.: *Lie algebras with a small number of ideals.* Linear Algebra and its Applications, 177:233 – 249, 1992, ISSN 0024-3795.

[3] Benito, P. y de-la-Concepción, D.: *Sage computations of $\mathfrak{sl}_2(k)$-Levi extensions, Tibilisi Math.* Journal, 5(2):3–17, 2012.

[4] Crawley, P. y Dilworth, R. P.: *Algebraic theory of lattices.* Prentice-Hall, 1973.

[5] Dixmier, J.: *Certaines algèbres non associatives simples définies par la transvection des formes binaires.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 346:110–128, 1984.

[6] Erdmann, K. y Wildon, M. J.: *Introduction to Lie algebras.* Springer Science & Business Media, 2006.

[7] Humphreys, J.: *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volumen 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[8] Jacobson, N.: *Lie algebras.* Número 10. Courier Corporation, 1979.

[9] Marshall, E. I.: *The Frattini subalgebra of a Lie algebra.* Journal of the London Mathematical Society, 1(1):416–422, 1967.

[10] Pérez-Aradros, I.: *Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena.* Universidad de La Rioja, 2016.

[11] Šnobl, L.: *On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43(50):505202, 2010.

Apéndice A

Algoritmo

Primero nos declaramos la transvección

```
transveccion[0, g_, k_, n_, m_] = 0;
transveccion[f_, 0, k_, n_, m_] = 0;
transveccion[f_, g_, 0, n_, m_] := f g;
transveccion[f_, g_, k_, n_, m_] := 0 /; k > Min[n, m];
transveccion[f_, g_, k_, n_, m_] := ((m - k)!*(n - k)!)/(m! n!)*
   Plus @@ Table[(-1)^i*Binomial[k, i]*D[f, {x, k - i}, {y, i}]*
      D[g, {x, i}, {y, k - i}], {i, 0, k}];
```

Ahora nos declaramos métodos auxiliares

```
jacobiTriple[c3si_, c3sj_, c3sh_, n_, k_, r_] :=
  jacobiTriple[c3si, c3sj, c3sh, n, k, r] =
   If[(k <= Min[n, n]) && (r <= Min[2 n - 2 k, n]),
    transveccion[
      transveccion[x^(n - c3si)*y^c3si, x^(n - c3sj)*y^c3sj,
       k, n, n], x^(n - c3sh)*y^c3sh, r, 2 n - 2 k, n] +
     transveccion[
      transveccion[x^(n - c3sj)*y^c3sj, x^(n - c3sh)*y^c3sh,
       k, n, n], x^(n - c3si)*y^c3si, r, 2 n - 2 k, n] +
     transveccion[
      transveccion[x^(n - c3sh)*y^c3sh, x^(n - c3si)*y^c3si,
       k, n, n], x^(n - c3sj)*y^c3sj, r, 2 n - 2 k, n], 1];

auxGenerate4Sets[num_, var_] :=
  auxGenerate4Sets[num, var] =
   Append[var, #] & /@ Table[i, {i, 0, num}];
generate4Sets[n_, k_] :=
  generate4Sets[n, k] =
   Flatten[Map[auxGenerate4Sets[2 n - 2 k, #] &,
     Subsets[Table[i, {i, 0, n}], {2}]], 1];
```

```
getNombreAlgebraLie[n_, k_, r_, p_] :=
  "V(" <> ToString[n] <> ")\[Times]V(" <> ToString[2 n - 2 k] <>
   ")\[Times]V(" <> ToString[3 n - 2 k - 2 r] <> ")\[Times]V(" <>
   ToString[4 n - 2 k - 2 r - 2 p] <> ")";
getTerna[a_, b_, c_] :=
  "(" <> ToString[a] <> ", " <> ToString[b] <> ToString[", "] <>
   ToString[ c] <> ")";

jacobiTriple4NoAlpha[c4si_, c4sj_, c4sh_, n_, k_, r_, p_] :=
  jacobiTriple4NoAlpha[c4si, c4sj, c4sh, n, k, r, p] =
   If[(r <= Min[2 n - 2 k, n]) && (p <= Min[3 n - 2 k - 2 r, n]),
    transveccion[x^(n - c4si)*y^c4si,
      transveccion[x^(n - c4sj)*y^c4sj,
       x^(2*n - 2*k - c4sh)*y^c4sh, r, n, 2 n - 2 k],
       p, n, 3 n - 2 k - 2 r] -

     transveccion[x^(n - c4sj)*y^c4sj,
      transveccion[x^(n - c4si)*y^c4si,
       x^(2*n - 2*k - c4sh)*y^c4sh, r, n, 2 n - 2 k],
       p, n, 3 n - 2 k - 2 r], 1];

jacobiTriple4Alpha[c4si_, c4sj_, c4sh_, n_, k_, r_,
  p_, \[Alpha]_] :=
  jacobiTriple4NoAlpha[c4si, c4sj, c4sh, n, k, r, p, \[Alpha]] =
   If[(k <= n) && (p + r - k <= 2 n - 2 k) && (r <=
       Min[2 n - 2 k, n]) && (p <= Min[3 n - 2 k - 2 r, n]),
    \[Alpha]*
      transveccion[x^(2 n - 2 k - c4sh)*y^c4sh,
       transveccion[x^(n - c4si)*y^c4si,
        x^(n - c4sj)*y^c4sj, k, n, n],
        p + r - k, 2 n - 2 k, 2 n - 2 k] +
     transveccion[x^(n - c4si)*y^c4si,
      transveccion[x^(n - c4sj)*y^c4sj,
       x^(2*n - 2*k - c4sh)*y^c4sh, r, n, 2 n - 2 k],
       p, n, 3 n - 2 k - 2 r] -

     transveccion[x^(n - c4sj)*y^c4sj,
      transveccion[x^(n - c4si)*y^c4si,
       x^(2*n - 2*k - c4sh)*y^c4sh, r, n, 2 n - 2 k],
       p, n, 3 n - 2 k - 2 r], 1];

resuelveJacobiAlpha[c4si_, c4sj_, c4sh_, n_, k_, r_, p_] :=
  Module[{\[Alpha], solu},
   solu =
    Solve[CoefficientList[
```

```
      jacobiTriple4Alpha[c4si, c4sj, c4sh, n, k, r, p,
        \[Alpha]], {x, y}] == 0, \[Alpha]];
   If[solu === {} (*No hay solucion? *),
    Return[{False, False, 0}],
    If[solu === {{}}(* Cualquier alfa es solucion? *),
     Return[{True, True, 0}],
     Return[{True, False, solu[[1, 1, 2]]}]
     ]
    ]
   ];
```

Finalmente ya podemos crearnos el generador de tablas de álgebras de Lie que aparecen en los apéndices B y C.

```
comprobarIdJacobi4StepOptimized[n_, k_, r_, p_] :=
  Module[{i, c4si = 0, c4sj = 0, c4sh = 0, aux, \[Phi], auxsol,
    soluInicial = False, soluActual, fallaBloque,
    name = getNombreAlgebraLie[n, k, r, p]},
   If[EvenQ[k], Return[{False, name, "La k es par"}]];
   aux = Subsets[Table[i, {i, 0, n}], {3}];
   For[i = 1, i <= Length[aux], i++,
    If[Exponent[
       jacobiTriple[aux[[i, 1]], aux[[i, 2]], aux[[i, 3]], n,
         k, r], x] != -Infinity,
     Return[{False, name,
        "Ha fallado " <> getTerna @@ aux[[i]] <> " en (1)" ,
          "-"}];
     ]
    ];
   fallaBloque = False;
   aux = generate4Sets[n, k];
   For[i = 1, i <= Length[aux], i++,
    If[Exponent[
        jacobiTriple4NoAlpha[aux[[i, 1]], aux[[i, 2]],
          aux[[i, 3]], n, k, r, p], x] != -Infinity,
      If[r + p - k <= 0 || EvenQ[r + p - k],
        Return[{False, name, "Ha fallado " <>
          getTerna @@ aux[[i]] <> " en (2)", "-"}],
        fallaBloque = True;
        Break[];
        ];];
    ];
   If[Not[fallaBloque] ,
    Return[{True, name, "Todo ha salido bien", "0"}]];
   For[i = 1, i <= Length[aux], i++,
    If[soluInicial === False,
     auxsol =
```

```
      resuelveJacobiAlpha[aux[[i, 1]], aux[[i, 2]], aux[[i, 3]],
        n, k, r, p];
     If[auxsol[[1]],
      If[Not[auxsol[[2]]], soluInicial = auxsol[[3]]],
      Return[{False, name,
        "Ha fallado " <> getTerna @@ aux[[i]] <> " en (2)", "-"}]
      ],
     If[Exponent[
        jacobiTriple4Alpha[aux[[i, 1]], aux[[i, 2]], aux[[i, 3]],
         n, k, r, p, soluInicial], x] != -Infinity,
      Return[{False, name,
        "Ha fallado " <> getTerna @@ aux[[i]] <> " en (2) " <>
         ToString[InputForm[soluInicial]] <> "!=" <>
         ToString[
          InputForm[
           resuelveJacobiAlpha[aux[[i, 1]], aux[[i, 2]],
             aux[[i, 3]], n, k, r, p][[3]]]], "-"}]
      ]
     ]
    ];
  Return[{True, name, "Todo ha salido bien",
    ToString[InputForm[soluInicial]]}];
  ];
```

Apéndice B

Álgebras de Lie

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
1	1	0	0	$V(1)\times V(0)\times V(1)\times V(2)$		0
1	1	0	1	$V(1)\times V(0)\times V(1)\times V(0)$	Falla en (0, 1, 0)	–
2	1	0	0	$V(2)\times V(2)\times V(4)\times V(6)$		0
2	1	0	1	$V(2)\times V(2)\times V(4)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 0)	–
2	1	0	2	$V(2)\times V(2)\times V(4)\times V(2)$		5/3
2	1	1	0	$V(2)\times V(2)\times V(2)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 0)	–
2	1	1	1	$V(2)\times V(2)\times V(2)\times V(2)$		1
2	1	1	2	$V(2)\times V(2)\times V(2)\times V(0)$	Falla en (0, 1, 2)	–
2	1	2	0	$V(2)\times V(2)\times V(0)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
3	1	0	0	$V(3)\times V(4)\times V(7)\times V(10)$		0
3	1	0	1	$V(3)\times V(4)\times V(7)\times V(8)$	Falla en (0, 1, 0)	–
3	1	0	2	$V(3)\times V(4)\times V(7)\times V(6)$		12/7
3	1	0	3	$V(3)\times V(4)\times V(7)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 2)	–
3	1	1	0	$V(3)\times V(4)\times V(5)\times V(8)$	Falla en (0, 1, 0)	–
3	1	1	1	$V(3)\times V(4)\times V(5)\times V(6)$		4/5
3	1	1	2	$V(3)\times V(4)\times V(5)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 2)	–
3	1	1	3	$V(3)\times V(4)\times V(5)\times V(2)$		7/5
3	1	2	0	$V(3)\times V(4)\times V(3)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
3	1	2	1	$V(3)\times V(4)\times V(3)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
3	1	2	2	$V(3)\times V(4)\times V(3)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
3	1	2	3	$V(3)\times V(4)\times V(3)\times V(0)$	Descartada en [10]	–
3	1	3	0	$V(3)\times V(4)\times V(1)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 2)	–
3	1	3	1	$V(3)\times V(4)\times V(1)\times V(2)$		−2
3	3	0	0	$V(3)\times V(0)\times V(3)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
3	3	0	1	$V(3)\times V(0)\times V(3)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
3	3	0	2	$V(3)\times V(0)\times V(3)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
3	3	0	3	$V(3)\times V(0)\times V(3)\times V(0)$	Descartada en [10]	–
4	1	0	0	$V(4)\times V(6)\times V(10)\times V(14)$		0

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
4	1	0	1	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 0)	–
4	1	0	2	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(10)$		26/15
4	1	0	3	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 2)	–
4	1	0	4	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(6)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
4	1	1	0	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 0)	–
4	1	1	1	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(10)$		3/4
4	1	1	2	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 2)	–
4	1	1	3	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(6)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
4	1	1	4	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 4)	–
4	1	2	0	$V(4) \times V(6) \times V(6) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
4	1	2	1	$V(4) \times V(6) \times V(6) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
4	1	2	2	$V(4) \times V(6) \times V(6) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
4	1	2	3	$V(4) \times V(6) \times V(6) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
4	1	2	4	$V(4) \times V(6) \times V(6) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
4	1	3	0	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 2)	–
4	1	3	1	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(6)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
4	1	3	2	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 4)	–
4	1	3	3	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(2)$		3/2
4	1	3	4	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(0)$	Falla en (0, 1, 6)	–
4	1	4	0	$V(4) \times V(6) \times V(2) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
4	1	4	1	$V(4) \times V(6) \times V(2) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
4	1	4	2	$V(4) \times V(6) \times V(2) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
4	3	0	0	$V(4) \times V(2) \times V(6) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
4	3	0	1	$V(4) \times V(2) \times V(6) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
4	3	0	2	$V(4) \times V(2) \times V(6) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
4	3	0	3	$V(4) \times V(2) \times V(6) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
4	3	0	4	$V(4) \times V(2) \times V(6) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
4	3	1	0	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 0)	–
4	3	1	1	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(6)$	Falla en (0, 1, 1)	–
4	3	1	2	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 2)	–
4	3	1	3	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(2)$		1/2
4	3	1	4	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(0)$	Falla en (0, 3, 2)	–
4	3	2	0	$V(4) \times V(2) \times V(2) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
4	3	2	1	$V(4) \times V(2) \times V(2) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
4	3	2	2	$V(4) \times V(2) \times V(2) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
5	1	0	0	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(18)$		0
5	1	0	1	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(16)$	Falla en (0, 1, 0)	–
5	1	0	2	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(14)$		68/39
5	1	0	3	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 2)	–
5	1	0	4	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
5	1	0	5	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 4)	–
5	1	1	0	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(16)$	Falla en (0, 1, 0)	–
5	1	1	1	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(14)$		8/11

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
5	1	1	2	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 2)	–
5	1	1	3	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
5	1	1	4	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 4)	–
5	1	1	5	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(6)$	Falla en (0, 3, 3) ($\star$)	–
5	1	2	0	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(14)$	Descartada en [10]	–
5	1	2	1	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(12)$	Descartada en [10]	–
5	1	2	2	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
5	1	2	3	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	1	2	4	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	1	2	5	$V(5) \times V(8) \times V(9) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	1	3	0	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 2)	–
5	1	3	1	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
5	1	3	2	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 4)	–
5	1	3	3	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(6)$	Falla en (0, 3, 3) ($\star$)	–
5	1	3	4	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 6)	–
5	1	3	5	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(2)$		22/21
5	1	4	0	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
5	1	4	1	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	1	4	2	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	1	4	3	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	1	4	4	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
5	1	4	5	$V(5) \times V(8) \times V(5) \times V(0)$	Descartada en [10]	–
5	1	5	0	$V(5) \times V(8) \times V(3) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	1	5	1	$V(5) \times V(8) \times V(3) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	1	5	2	$V(5) \times V(8) \times V(3) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	1	5	3	$V(5) \times V(8) \times V(3) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	0	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(14)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	1	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(12)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	2	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	3	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	4	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	3	0	5	$V(5) \times V(4) \times V(9) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	3	1	0	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 0)	–
5	3	1	1	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(10)$	Falla en (0, 1, 1)	–
5	3	1	2	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 2)	–
5	3	1	3	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(6)$	Falla en (0, 1, 3)	–
5	3	1	4	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 4)	–
5	3	1	5	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(2)$		12/7
5	3	2	0	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
5	3	2	1	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	3	2	2	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	3	2	3	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	3	2	4	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(2)$	Descartada en [10]	–

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
5	3	2	5	$V(5) \times V(4) \times V(5) \times V(0)$	Descartada en [10]	–
5	3	3	0	$V(5) \times V(4) \times V(3) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	3	3	1	$V(5) \times V(4) \times V(3) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	3	3	2	$V(5) \times V(4) \times V(3) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	3	3	3	$V(5) \times V(4) \times V(3) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
5	3	4	0	$V(5) \times V(4) \times V(1) \times V(6)$	Falla en (0, 1, 3)	–
5	3	4	1	$V(5) \times V(4) \times V(1) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 4)	–
5	5	0	0	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
5	5	0	1	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
5	5	0	2	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
5	5	0	3	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(4)$	Descartada en [10]	–
5	5	0	4	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(2)$	Descartada en [10]	–
5	5	0	5	$V(5) \times V(0) \times V(5) \times V(0)$	Descartada en [10]	–
6	1	0	0	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(22)$		0
6	1	0	1	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(20)$	Falla en (0, 1, 0)	–
6	1	0	2	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(18)$		7/4
6	1	0	3	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(16)$	Falla en (0, 1, 2)	–
6	1	0	4	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(14)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
6	1	0	5	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 4)	–
6	1	0	6	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 3) ($\star$)	–
6	1	1	0	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(20)$	Falla en (0, 1, 0)	–
6	1	1	1	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(18)$		5/7
6	1	1	2	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(16)$	Falla en (0, 1, 2)	–
6	1	1	3	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(14)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
6	1	1	4	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 4)	–
6	1	1	5	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 3) ($\star$)	–
6	1	1	6	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 6)	–
6	1	2	0	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(18)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	1	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(16)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	2	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(14)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	3	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(12)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	4	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	5	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	1	2	6	$V(6) \times V(10) \times V(12) \times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	1	3	0	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(16)$	Falla en (0, 1, 2)	–
6	1	3	1	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(14)$	Falla en (0, 3, 1) ($\star$)	–
6	1	3	2	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(12)$	Falla en (0, 1, 4)	–
6	1	3	3	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(10)$	Falla en (0, 3, 3) ($\star$)	–
6	1	3	4	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 6)	–
6	1	3	5	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(6)$		1
6	1	3	6	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 8)	–
6	1	4	0	$V(6) \times V(10) \times V(8) \times V(14)$	Descartada en [10]	–
6	1	4	1	$V(6) \times V(10) \times V(8) \times V(12)$	Descartada en [10]	–

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
6	1	4	2	$V(6)\times V(10)\times V(8)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	1	4	3	$V(6)\times V(10)\times V(8)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	1	4	4	$V(6)\times V(10)\times V(8)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	1	4	5	$V(6)\times V(10)\times V(8)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
6	1	4	6	$V(6)\times V(10)\times V(8)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	0	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(12)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	1	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	2	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	3	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	4	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	5	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
6	1	5	6	$V(6)\times V(10)\times V(6)\times V(0)$	Descartada en [10]	–
6	1	6	0	$V(6)\times V(10)\times V(4)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	1	6	1	$V(6)\times V(10)\times V(4)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	1	6	2	$V(6)\times V(10)\times V(4)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	1	6	3	$V(6)\times V(10)\times V(4)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
6	1	6	4	$V(6)\times V(10)\times V(4)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	0	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(18)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	1	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(16)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	2	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(14)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	3	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(12)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	4	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	5	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	3	0	6	$V(6)\times V(6)\times V(12)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	3	1	0	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(16)$	Falla en (0, 1, 0)	–
6	3	1	1	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(14)$	Falla en (0, 1, 1)	–
6	3	1	2	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(12)$	Falla en (0, 1, 2)	–
6	3	1	3	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(10)$	Falla en (0, 1, 3)	–
6	3	1	4	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(8)$	Falla en (0, 1, 4)	–
6	3	1	5	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(6)$	Falla en (0, 1, 5)	–
6	3	1	6	$V(6)\times V(6)\times V(10)\times V(4)$	Falla en (0, 1, 6)	–
6	3	2	0	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(14)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	1	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(12)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	2	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	3	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	4	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(6)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	5	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(4)$	Descartada en [10]	–
6	3	2	6	$V(6)\times V(6)\times V(8)\times V(2)$	Descartada en [10]	–
6	3	3	0	$V(6)\times V(6)\times V(6)\times V(12)$	Descartada en [10]	–
6	3	3	1	$V(6)\times V(6)\times V(6)\times V(10)$	Descartada en [10]	–
6	3	3	2	$V(6)\times V(6)\times V(6)\times V(8)$	Descartada en [10]	–
6	3	3	3	$V(6)\times V(6)\times V(6)\times V(6)$	Descartada en [10]	–

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón de fallo	α
6	3	3	4	$V(6) \times V(6) \times V(6) \times V(4)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	3	5	$V(6) \times V(6) \times V(6) \times V(2)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	3	6	$V(6) \times V(6) \times V(6) \times V(0)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	4	0	$V(6) \times V(6) \times V(4) \times V(10)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	4	1	$V(6) \times V(6) \times V(4) \times V(8)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	4	2	$V(6) \times V(6) \times V(4) \times V(6)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	4	3	$V(6) \times V(6) \times V(4) \times V(4)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	4	4	$V(6) \times V(6) \times V(4) \times V(2)$	Descartada en [10]	$-$
6	3	5	0	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(8)$	Falla en (0, 1, 4)	$-$
6	3	5	1	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(6)$	Falla en (0, 1, 5)	$-$
6	3	5	2	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(4)$	Falla en (0, 1, 6)	$-$
6	3	6	0	$V(6) \times V(6) \times V(0) \times V(6)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	0	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(14)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	1	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(12)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	2	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(10)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	3	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(8)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	4	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(6)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	5	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(4)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	0	6	$V(6) \times V(2) \times V(8) \times V(2)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	0	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(12)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	1	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(10)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	2	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(8)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	3	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(6)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	4	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(4)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	5	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(2)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	1	6	$V(6) \times V(2) \times V(6) \times V(0)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	2	0	$V(6) \times V(2) \times V(4) \times V(10)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	2	1	$V(6) \times V(2) \times V(4) \times V(8)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	2	2	$V(6) \times V(2) \times V(4) \times V(6)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	2	3	$V(6) \times V(2) \times V(4) \times V(4)$	Descartada en [10]	$-$
6	5	2	4	$V(6) \times V(2) \times V(4) \times V(2)$	Descartada en [10]	$-$

Nota 1. El $(\star)$ denota que al buscar la α que satisface (3.7) se han obtenido valores distintos y por tanto no es válida.

Apéndice C

Álgebras de Lie a descartar

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón
1	1	0	1	$V(1) \times V(0) \times V(1) \times V(0)$	Falla (0, 1, 0)
2	1	0	1	$V(2) \times V(2) \times V(4) \times V(4)$	Falla (0, 1, 0)
2	1	1	0	$V(2) \times V(2) \times V(2) \times V(4)$	Falla (0, 1, 0)
2	1	1	2	$V(2) \times V(2) \times V(2) \times V(0)$	Falla (0, 1, 2)
3	1	0	1	$V(3) \times V(4) \times V(7) \times V(8)$	Falla (0, 1, 0)
3	1	0	3	$V(3) \times V(4) \times V(7) \times V(4)$	Falla (0, 1, 2)
3	1	1	0	$V(3) \times V(4) \times V(5) \times V(8)$	Falla (0, 1, 0)
3	1	1	2	$V(3) \times V(4) \times V(5) \times V(4)$	Falla (0, 1, 2)
3	1	3	0	$V(3) \times V(4) \times V(1) \times V(4)$	Falla (0, 1, 2)
4	1	0	1	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(12)$	Falla (0, 1, 0)
4	1	0	3	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(8)$	Falla (0, 1, 2)
4	1	0	4	$V(4) \times V(6) \times V(10) \times V(6)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
4	1	1	0	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(12)$	Falla (0, 1, 0)
4	1	1	2	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(8)$	Falla (0, 1, 2)
4	1	1	3	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(6)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
4	1	1	4	$V(4) \times V(6) \times V(8) \times V(4)$	Falla (0, 1, 4)
4	1	3	0	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(8)$	Falla (0, 1, 2)
4	1	3	1	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(6)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
4	1	3	2	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(4)$	Falla (0, 1, 4)
4	1	3	4	$V(4) \times V(6) \times V(4) \times V(0)$	Falla (0, 1, 6)
4	3	1	0	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(8)$	Falla (0, 1, 0)
4	3	1	1	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(6)$	Falla (0, 1, 1)
4	3	1	2	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(4)$	Falla (0, 1, 2)
4	3	1	4	$V(4) \times V(2) \times V(4) \times V(0)$	Falla (0, 3, 2)
5	1	0	1	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(16)$	Falla (0, 1, 0)
5	1	0	3	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(12)$	Falla (0, 1, 2)
5	1	0	4	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(10)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
5	1	0	5	$V(5) \times V(8) \times V(13) \times V(8)$	Falla (0, 1, 4)

n	k	r	p	$\mathfrak{sl}_2$-módulo	Razón
5	1	1	0	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(16)$	Falla (0, 1, 0)
5	1	1	2	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(12)$	Falla (0, 1, 2)
5	1	1	3	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(10)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
5	1	1	4	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(8)$	Falla (0, 1, 4)
5	1	1	5	$V(5) \times V(8) \times V(11) \times V(6)$	Falla (0, 3, 3) ($\star$)
5	1	3	0	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(12)$	Falla (0, 1, 2)
5	1	3	1	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(10)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
5	1	3	2	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(8)$	Falla (0, 1, 4)
5	1	3	3	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(6)$	Falla (0, 3, 3) ($\star$)
5	1	3	4	$V(5) \times V(8) \times V(7) \times V(4)$	Falla (0, 1, 6)
5	3	1	0	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(12)$	Falla (0, 1, 0)
5	3	1	1	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(10)$	Falla (0, 1, 1)
5	3	1	2	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(8)$	Falla (0, 1, 2)
5	3	1	3	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(6)$	Falla (0, 1, 3)
5	3	1	4	$V(5) \times V(4) \times V(7) \times V(4)$	Falla (0, 1, 4)
5	3	4	0	$V(5) \times V(4) \times V(1) \times V(6)$	Falla (0, 1, 3)
5	3	4	1	$V(5) \times V(4) \times V(1) \times V(4)$	Falla (0, 1, 4)
6	1	0	1	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(20)$	Falla (0, 1, 0)
6	1	0	3	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(16)$	Falla (0, 1, 2)
6	1	0	4	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(14)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
6	1	0	5	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(12)$	Falla (0, 1, 4)
6	1	0	6	$V(6) \times V(10) \times V(16) \times V(10)$	Falla (0, 3, 3) ($\star$)
6	1	1	0	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(20)$	Falla (0, 1, 0)
6	1	1	2	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(16)$	Falla (0, 1, 2)
6	1	1	3	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(14)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
6	1	1	4	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(12)$	Falla (0, 1, 4)
6	1	1	5	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(10)$	Falla (0, 3, 3) ($\star$)
6	1	1	6	$V(6) \times V(10) \times V(14) \times V(8)$	Falla (0, 1, 6)
6	1	3	0	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(16)$	Falla (0, 1, 2)
6	1	3	1	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(14)$	Falla (0, 3, 1) ($\star$)
6	1	3	2	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(12)$	Falla (0, 1, 4)
6	1	3	3	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(10)$	Falla (0, 3, 3) ($\star$)
6	1	3	4	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(8)$	Falla (0, 1, 6)
6	1	3	6	$V(6) \times V(10) \times V(10) \times V(4)$	Falla (0, 1, 8)
6	3	1	0	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(16)$	Falla (0, 1, 0)
6	3	1	1	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(14)$	Falla (0, 1, 1)
6	3	1	2	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(12)$	Falla (0, 1, 2)
6	3	1	3	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(10)$	Falla (0, 1, 3)
6	3	1	4	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(8)$	Falla (0, 1, 4)
6	3	1	5	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(6)$	Falla (0, 1, 5)
6	3	1	6	$V(6) \times V(6) \times V(10) \times V(4)$	Falla (0, 1, 6)
6	3	5	0	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(8)$	Falla (0, 1, 4)
6	3	5	1	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(6)$	Falla (0, 1, 5)
6	3	5	2	$V(6) \times V(6) \times V(2) \times V(4)$	Falla (0, 1, 6)